

Autor: *prof. dr hab. inż. Roman Kadaj – Akademia Rolnicza w Krakowie*  
Opiniodawca: *prof. dr hab. inż. Idzi Gajderowicz – Uniwersytet Warmińsko-  
-Mazurski w Olsztynie*

W celu usprawnienia i ujednoczenia geodezyjnych prac obliczeniowych zaleca się stosowanie wytycznych technicznych „G-1.10 Formuły odwzorowawcze i parametry układów współrzędnych”.

Załączony program TRANSPOL v.1.0 może być używany do kontroli poprawności przeliczeń współrzędnych pomiędzy układami należącymi do państwowego systemu odniesień przestrzennych.

TRANSPOL v.1.0 należy stosować wyłącznie do przeliczeń współrzędnych punktów położonych na obszarze kraju, dla stref i pasów odwzorowania zdefiniowanych w instrukcji technicznej „O-1/O-2 Ogólne zasady wykonywania prac geodezyjnych i kartograficznych”.

Departament Geodezji GUGiK

© Główny Geodeta Kraju  
Warszawa 2001

**ISBN-83-239-1473-7**

Nakład: 2000 egz.

Druk: Okręgowe Przedsiębiorstwo Geodezyjno-Kartograficzne w Białymstoku

## SPIS TREŚCI:

	Strona
1. Uwagi porządkowe .....	7
2. Ogólny schemat bezpośrednich przejść transformacyjnych pomiędzy układami współrzędnych .....	14
3. Transformacja współrzędnych kartezjańskich pomiędzy elipsoidami GRS-80 (WGS-84) i <i>Krasowskiego</i> .....	18
4. Przeliczenie współrzędnych geodezyjnych B,L,H na współrzędne kartezjańskie X,Y,Z oraz zadanie odwrotne .....	23
5. Aplikacje odwzorowania <i>Gaussa-Krügera</i> do realizacji układów współrzędnych: „1992” i „2000” oraz układu „1942” .....	28
6. Realizacja układu „1965” oraz GUGiK-80 .....	56
7. Empiryczny układ „1965” .....	76
8. Przeliczenie wysokości elipsoidalnych na normalne lub odwrotnie .....	85
Literatura .....	88
Załącznik 1. Opis programu TRANSPOL v. 1.0. ....	90
Załącznik 2. Przykład procedury obliczania długości i azymutów linii geodezyjnej metodą „szerokości średniej” <i>Krügera</i> .....	96
Załącznik 3. Współrzędne punktów sieci EUREF-POL w układach elipsoidalnych GRS-80 i <i>Krasowskiego</i> .....	99
Załącznik 4. Współrzędne EUREF-POL w strefach układu „1965” oraz w układzie „1992” .....	101
Załącznik 5. Współrzędne EUREF-POL w strefach układu „2000” .....	103
Załącznik 6. TRANSPOL v. 1.0 .....	CD-ROM
Uwaga: Opis programu TRANSPOL v.1.0 (załącznik 1) jest rozszerzeniem tekstu pliku <i>pomoc.txt</i> (CD-ROM)	

## Skróty i słowa kluczowe

- ITRS, ETRS (ang. *International Terrestrial Reference System, European ...* - międzynarodowy system odniesień przestrzennych i jego europejski podsystem),
- EUREF-89 lub ETRF-89 (ang.: *European Terrestrial Reference Frame 1989* - europejski układ odniesienia systemu ETRS oparty na 35 stacjach bazowych, odniesiony do epoki obserwacyjnej 1989),
- GRS-80, WGS-84 (ang.: *Geodetic Reference System 1980, World Geodetic System 1984* - geometryczno-fizyczne modele Ziemi, przyjęte w systemie ITRS i jego podsystemach kontynentalnych, określone rezolucjami Międzynarodowej Unii Geodezji i Geofizyki oraz Międzynarodowej Asocjacji Geodezji),
- PUŁKOWO 42 (system odniesień przestrzennych z elipsoidą *Krasowskiego*, przyjęty w roku 1942 dla państw b. Układu Warszawskiego),
- EUREF-POL (polska sieć 11 punktów zerowego rzędu, wyznaczonych w układzie ETRF-89),
- POLREF (polska sieć 348 punktów odniesienia, nawiązana do sieci EUREF-POL),
- GPS (ang. *Global Positioning System*),

elipsoida odniesienia (przyjmuje nazwę GRS-80 lub WGS-84 jak modele Ziemi w systemie ITRS lub *Krasowskiego* - w systemie PUŁKOWO 42),

układ współrzędnych geograficznych geodezyjnych (krótko: geodezyjnych) BLH ,

układ współrzędnych kartezjańskich (geocentrycznych) XYZ,

transformacja trójwymiarowa, siedmioparametrowa (przez podobieństwo),

kartograficzne układy współrzędnych:

„2000”, „1992”, „1965”, „1942”, GUGIK-80, UTM, układy lokalne,

odwzorowania konforemne elipsoidy:

*Gaussa-Krügera*,

quasi-stereograficzne (*Roussilhe'a*) ,

powierzchni elipsoidy na sferę (*Lagrange'a*),

odwzorowania konforemne sfery:

walcowe - poprzeczne (poprzeczne *Mercatora*),

walcowe - normalne (*Mercatora* lub normalne *Mercatora*),

współrzędne izometryczne,

przekształcenia konforemne, schemat *Hornera* dla wielomianu zespolonego,

składowe pola zniekształceń odwzorowawczych:

elementarna skala długości, elementarne zniekształcenie długości,

konwergencja (zbieżność południków),  
izolinie zniekształceń elementarnych,  
elementarna skala pola, elementarne zniekształcenie pola,  
redukcje odwzorowawcze obserwacji:  
    metody: empiryczna, analityczna, interpolacyjna,  
transformacja *Helmerta* (przez podobieństwo), punkty dostosowania, punkty kontrolne,  
korekta posttransformacyjna *Hausbrandta*,  
geoida niwelacyjna, quasi-geoida,  
model geoidy

Autorzy cytowani:

*Balcerzak, Baran, Gajderowicz, Gdowski, Hausbrandt, Łyszkowicz, Krüger, Panasiuk, Plewako.*

## 1. Uwagi porządkowe

1.1. Niniejsze opracowanie jest częścią fakultatywną instrukcji technicznych G-1 i G-2. Obejmuje ono syntezę matematycznych formuł odwzorowawczych państwowych układów współrzędnych, czyli układów odniesień przestrzennych dla krajowych opracowań geodezyjnych lub kartograficznych. W stosunku do poprzedniego wydania analogicznych wytycznych technicznych G-1.10, gdzie zamieszczono jedynie poprawki odwzorowawcze państwowego układu „1965”, obecna edycja zawiera pełny zestaw wzorów, zarówno dla układu „1965”, jak też dla nowych układów współrzędnych o symbolicznych nazwach „1992” i „2000”, będących odwzorowaniem elipsoidy GRS-80 (WGS-84). Podane będą również zasady transformacji współrzędnych pomiędzy różnymi systemami elipsoidalnymi (*Krasowskiego*, GRS-80) lub układami odwzorowawczymi elipsoid. Do kompletu systemu odniesień przestrzennych, obok matematycznych układów płaskich (odwzorowawczych) lub przestrzennych, wchodzi również system wysokości normalnych.

1.2. Nowe układy współrzędnych dla obszaru Polski są zgodne (powiązane poprzez osnowy geodezyjne) z systemem europejskim ETRF-89, dla którego matematyczną powierzchnią odniesienia jest powierzchnia elipsoidy GRS-80. Definicja zbioru parametrów geometryczno-fizycznych opisujących Ziemię z 1979 r. znana pod skrótem GRS-80 w stosunku do nowszej definicji WGS-84 nie różniła się istotnie w określeniu parametrów geometrycznych elipsoidy, dlatego zamiast nazwy: elipsoida GRS-80 notujemy też równoważnie: elipsoida WGS-84.

1.3. Ostatnio obowiązujące w Polsce układy współrzędnych („1942”, „1965”) wywodziły się z elipsoidy *Krasowskiego*, która - jak wynika z porównań aktualnych i archiwalnych informacji o osnowach geodezyjnych - nie ma położenia geocentrycznego ani też ściśle równoległo-osnowego z elipsoidą GRS-80. Przeliczenie współrzędnych z dowolnego układu odwzorowawczego elipsoidy *Krasowskiego* na dowolny układ odwzorowawczy elipsoidy GRS-80 wymaga więc pośredniego przejścia transformacyjnego pomiędzy układami przestrzennymi (elipsoidalnymi) obu elipsoid. Zagadnienia te są rozważane szczegółowo w rozdziale 3 niniejszych wytycznych. Zestawienie charakterystycznych parametrów geometrycznych elipsoid GRS-80 i *Krasowskiego* przedstawia tabela 1.1.

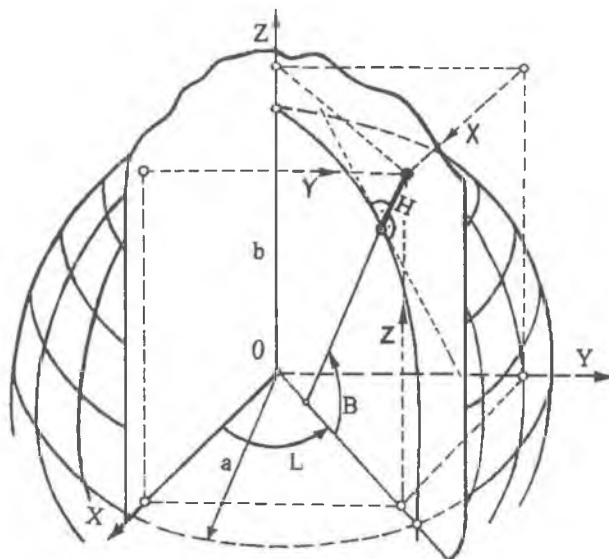
[Elipsoida *Krasowskiego* z punktem przyłożenia do geoidy w *Putkowie* i lokalną orientacją astronomiczną została wprowadzona w Polsce w roku 1952 w miejsce poprzednio używanej elipsoidy *Bessela* z punktem przyłożenia w Borowej Górze. Stało się to w wyniku decyzji o ujednoczeniu systemu odniesień przestrzennych dla państw b. bloku wschodniego. System ten, którego elementem jest elipsoida *Krasowskiego* nazywamy też PUŁKOWO 42. Data „1942” wiąże się z wprowadzeniem systemu w b. Związku Radzieckim.]

1.4. Zakres niniejszych wytycznych ogranicza się do następujących rodzajów układów współrzędnych (drukem pogrubionym zapisujemy umowne - symboliczne - nazwy tych układów):

1.4.1. Układ współrzędnych geograficznych - geodezyjnych (krótko: geodezyjnych lub elipsoidalnych) **BLH** (*B* - szerokość, *L* - długość, *H* - wysokość) - rys. 1.1, przy czym w szczególności oznaczymy:

$(BLH)_G$  - dla elipsoidy GRS-80 (WGS-84 )

$(BLH)_K$  - dla elipsoidy *Krasowskiego*



Rys. 1.1. Współrzędne geodezyjne  $B, L, H$  i kartezjańskie -  $X, Y, Z$

**1.4.2.** Układ współrzędnych kartezjańskich (prostokątnych) - elipsoidy odniesienia, tj. odpowiednio:

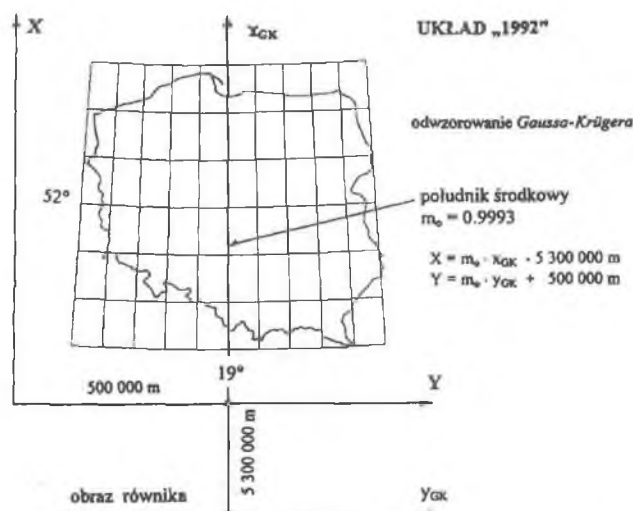
$(XYZ)_G$  - dla elipsoidy GRS-80 (WGS-84)

$(XYZ)_K$  - dla elipsoidy *Krasowskiego*

Trójwymiarowe układy kartezjańskie mają znaczenie zwłaszcza przy numerycznym opracowaniu sieci wektorowych GPS. Pomiedzy układem kartezjańskim a geodezyjnym danej elipsoidy zachodzą związki analityczne pozwalające na dokonywanie wzajemnie jednoznacznych przeliczeń. Związki pomiedzy układami kartezjańskimi różnych elipsoid określa się natomiast empirycznie w oparciu o punkty dostosowania (punkty osnów geodezyjnych wyznaczone w różnych układach). Zagadnienia te są przedmiotem rozdziałów: 3, 4.

**1.4.3.** Nowy układ współrzędnych „1992”<sup>\*)</sup>, utworzony został w oparciu o jednostrefowe dla obszaru Polski odwzorowanie *Gaussa-Krügera* elipsoidy GRS-80 z południkiem osiowym (środkowym)  $L_0=19^\circ$  i przy założeniu skali długości na tym południku (skali kurczenia)  $m_0 = 0.9993$ . Przyjęta skala długości  $m_0$  odwzorowania *Gaussa-Krügera* ma na celu kompromisowe rozłożenie liniowych zniekształceń odwzorowawczych, które wynoszą od -70 cm/km na południku środkowym do ok. +90 cm/km w skrajnych, wschodnich obszarach Polski (rys. 1.2).

<sup>\*)</sup> Państwowy Układ Współrzędnych 1992. Główny Geodeta Kraju. Warszawa 1995. Mat. do użytku służbowego opracowane przez dr. Jerzego Balcerzaka.

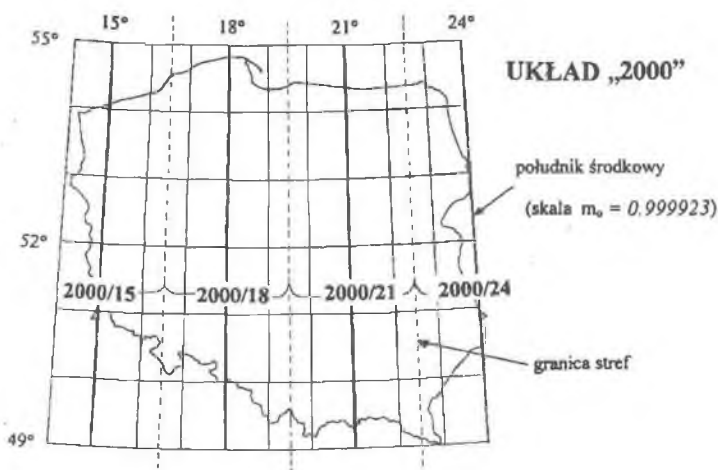


Rys. 1.2. Układ „1992” - jednostrefowe odwzorowanie *Gaussa-Krügera* dla obszaru Polski

1.4.4. Nowe układy strefowe dla map wielkoskalowych \*\*), oznaczone odpowiednio (rys. 1.3):

2000/15      2000/18      2000/21      2000/24

stanowiące odrębne *odwzorowania Gaussa-Krügera* w pasach 3°, z południkami środkowymi 15°, 18°, 21°, 24°, z jednakową skalą na tych południkach  $m_0 = 0.999923$ .



Rys.1.3. Układy strefowe „2000”

Przyjęta skala  $m_0$  na południku środkowym każdej strefy oznacza, że zniekształcenia odwzorowawcze długości na tym południku wynoszą -7.7 cm/km. Na styku sąsiednich stref na obszarze Polski wynoszą one maksymalnie ok. +7 cm/km.

\*\*\*) *Ekspertyza dotycząca odwzorowania kartograficznego dla wielkoskalowych opracowań geodezyjnych i kartograficznych w Polsce*. Polska Akademia Nauk, Komitet Geodezji, Sekcja Sieci Geodezyjnych. Opracowanie wykonane przez zespół pod kierunkiem *prof. dr. hab. Włodzimierza Barana*

1.4.5. Dawny państwowy układ współrzędnych „1942”, utworzony był przez zastosowanie odwzorowania *Gaussa-Krügera* elipsoidy *Krasowskiego* w pasach o szerokości  $3^\circ$  lub  $6^\circ$  (zależnie od celu zastosowania - skali mapy) i przy założeniu wiernego odwzorowania południka środkowego każdej strefy, czyli ze skalą na południku środkowym  $m_0 = 1.0$ .

Układ ten obowiązywał w Polsce od roku 1952, ale w służbie cywilnej tylko do drugiej połowy lat 60., od kiedy zaczęto już wprowadzać nowy układ „1965”.

Strefy układu „1942”, jak również zasada tworzenia współrzędnych pełnych, były analogiczne jak w obecnie wprowadzonym układzie „2000”. Zasadnicza różnica kryje się więc w wyborze elipsoidy odniesienia i skali  $m_0$  na południkach środkowych. Powstałe układy odwzorowawcze elipsoidy *Krasowskiego* (odpowiadające pasom  $3^\circ$  z południkami środkowymi:  $15^\circ$ ,  $18^\circ$ ,  $21^\circ$ ,  $24^\circ$  o numerach: 5, 6, 7, 8) oznaczmy odpowiednio:

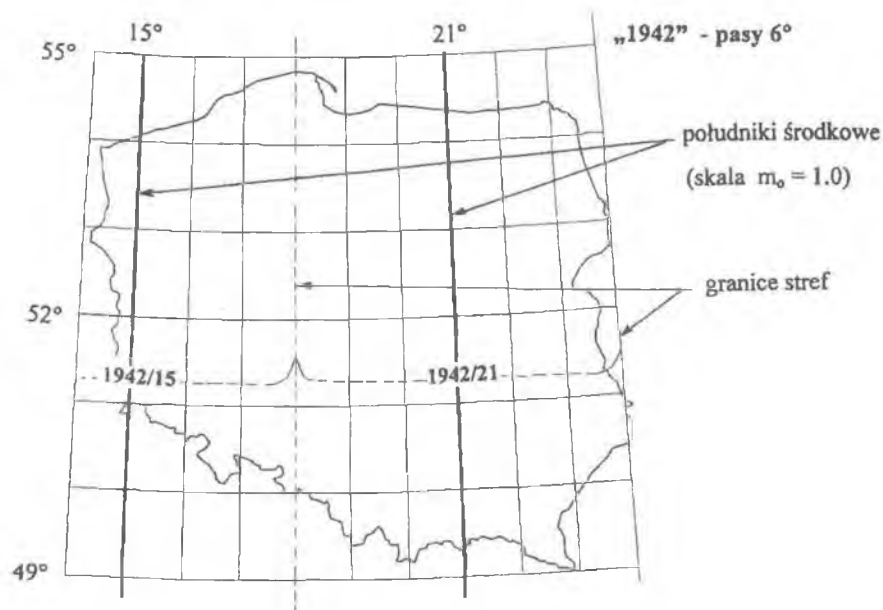
**1942/15    1942/18    1942/21    1942/24**

Odwzorowania w pasach  $3^\circ$  stosowano dla map wielkoskalowych.

Odwzorowania w pasach  $6^\circ$  tworzyły w obszarze Polski dwie strefy z południkami środkowymi  $15^\circ$  i  $21^\circ$  o numerach 3 i 4 (rys. 1.4). Oznaczmy je odpowiednio (podając dodatkowo informację o szerokości pasa):

**1942/15(6)    1942/21(6)**

Odwzorowania tego typu stosowano dla map średnioskalowych i drobnoskalowych.



Rys. 1.4. Układ „1942” w pasach  $6^\circ$

1.4.6. Dotychczasowy układ współrzędnych „1965” (będący m.in. podstawą tworzenia mapy zasadniczej kraju), podzielony na pięć stref (rys. 1.5),

**1965/1,    1965/2,    1965/3,    1965/4,    1965/5,**

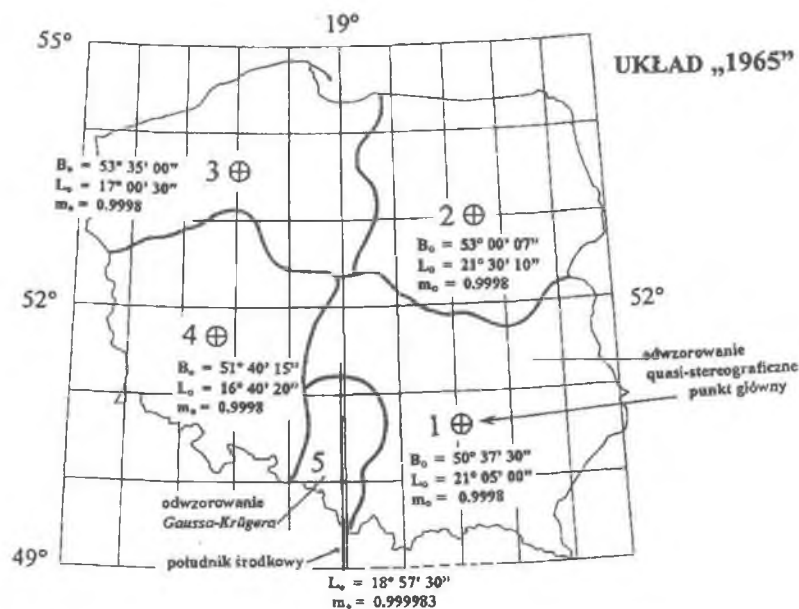


stanowiących odrębne odwzorowania powierzchni elipsoidy *Krasowskiego*. W strefach 1-4 zastosowano odwzorowanie quasi-stereograficzne (*Roussilhe'a*) ze skalą w punkcie głównym (skalą podobieństwa)  $m_0 = 0.9998$ , natomiast w strefie 5 - modyfikowane odwzorowanie *Gausso-Krügera* o skali na południku środkowym  $m_0 = 0.999983$ .

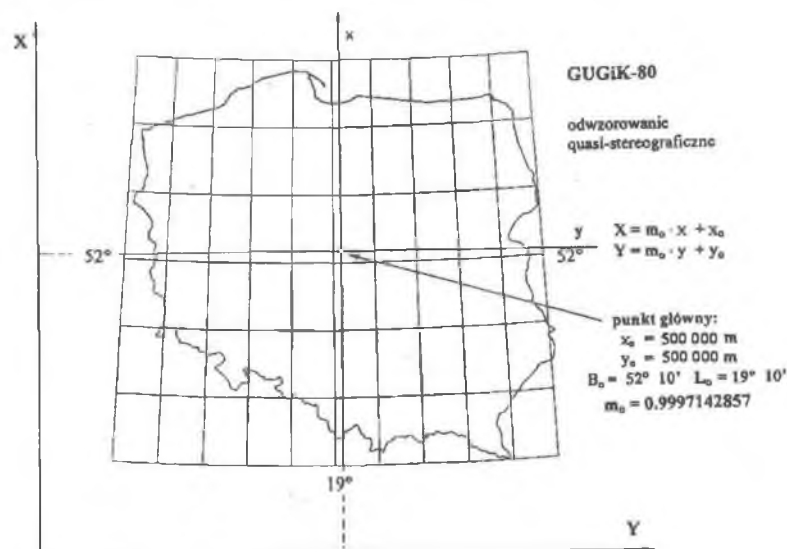
#### 1.4.7. Układ współrzędnych o symbolicznej nazwie

### GUGIK-80

(rys. 1.6), będący jednostrefowym odwzorowaniem quasi-stereograficznym w obszarze Polski. Układ ten był stosowany w Polsce dla map w skalach 1: 100 000 oraz 1: 500 000.



Rys. 1. 5. Podział obszaru Polski na strefy układu „1965”



Rys. 1.6. Układ współrzędnych GUGIK-80

**1.4.8.** System wysokości normalnych  $H_n$  (wartości geopotencjalne podzielone przez przeciętne wartości przyśpieszenia normalnego siły ciężkości). Elementem systemu wysokości normalnych jest quasi-poziuma powierzchnia odniesienia (quasi-geoida), którą ze względu na sposób określenia nazywamy w dalszym ciągu geoidą niwelacyjną.

**1.5.** Inne, nie wymienione powyżej, lecz stosowane w praktyce układy współrzędnych, definiowane na bazie różnych elipsoid odniesienia lub lokalnych płaszczyzn odniesienia, ze względu na ich ograniczone zastosowania praktyczne, nie będą przedmiotem szczegółowych zapisów w niniejszych wytycznych technicznych.

Powyższe uwagi dotyczą również układów oznaczanych: „**1942-83**” i „**1965-86**”, bazujących na wykonanym w latach 80. łącznym wyrównaniu osnów podstawowych państw „bloku wschodniego” (kampania JSAG). Zdefiniowane wówczas odpowiednie modyfikacje układów współrzędnych miały ograniczone zastosowania praktyczne (wykonano m.in. opracowania dotyczące granicy państwowej). Wobec przełomu politycznego 1989/90 i wcześniejszej „rewolucji” technologicznej w zakresie pomiarów sieci i wyznaczania pozycji (GPS) zaniechano dalszych prac modernizacyjnych osnów i układów współrzędnych opartych na elipsoidzie *Krasowskiego*, przygotowując polskie systemy odniesień przestrzennych do połączenia z jednolitym systemem europejskim (ETRF-89).

**1.6.** Zasady i formuły obliczeniowe ujęte w niniejszych wytycznych są przeznaczone zarówno do rozwiązywania zadań związanych z opracowaniem osnów geodezyjnych (mierzonych klasycznie lub przy wykorzystaniu techniki GPS), jak również w zagadnieniach produkcji kartograficznej (np.: przekształcanie archiwalnych zbiorów punktów z układu „**1965**” do układu „**2000**”, przekształcanie zwektoryzowanych obrazów map archiwalnych do układu „**2000**”, łączenie międzystrefowych opracowań kartograficznych w jednolite opracowania numeryczne, międzystrefowe przekształcanie współrzędnych punktów osnów geodezyjnych i in.).

**1.7.** Wszelkie formuły obliczeniowe dotyczące transformacji współrzędnych powinny być realizowane w zasadzie przy wykorzystaniu techniki komputerowej, przy czym aby zapobiec istotnym propagacjom błędów rachunkowych (zaokrąglenia), zmienne i funkcje rzeczywiste powinny być deklarowane co najmniej jako 8-bajtowe. Utworzone programy (procedury), przed ich zastosowaniem w procesach produkcyjnych w geodezji powinny być przetestowane na podstawie danych geodezyjnych dostarczonych przez Centralny Ośrodek Dokumentacji Geodezyjnej i Kartograficznej GUGiK. Elementem kontroli wewnętrznej programu (procedury) powinno być sprawdzenie zgodności rezultatów dla transformacji „wprost” i „odwrotnych” lub zastosowanie algorytmów alternatywnych do kontrolnego obliczenia tych samych współrzędnych. Podane w niniejszych wytycznych parametry liczbowe formuł odwzorowawczych gwarantują (w obszarze Polski) dokładność numeryczną znacznie wyższą niż wymagania praktyczne wynikające z dokładności pomiarów geodezyjnych (błądność numeryczna w wymiarze liniowym nie powinna przekraczać poziomu setnych części milimetra).

PARAMETRY GEOMETRYCZNE ELIPSOID		
	GRS-80	KRASOWSKIEGO
$a$ (*)	6378137.00000	6378245.00000
$b$	6356752.31414.....	6356863.01877....
$f$ (*)	1 : 298.257222101 (0.335281068118 E-02)	1 : 298.3 (0.335232986926 E-02)
$R_0$	6367449.14577.....	6367558.4969....
$b/a$	0.996647189319	0.996647670131
$n$	0.167922039463 E-02	0.167897918066 E-02
$e$	0.818191910428 E-01	0.818133340169 E-01
$e^2$	0.669438002290 E-02	0.669342162297 E-02
$e'$	0.820944381519 E-01	0.820885218206 E-01
$e'^2$	0.673949677548 E-02	0.673852541468 E-02

---

**Objaśnienia i uwagi:**

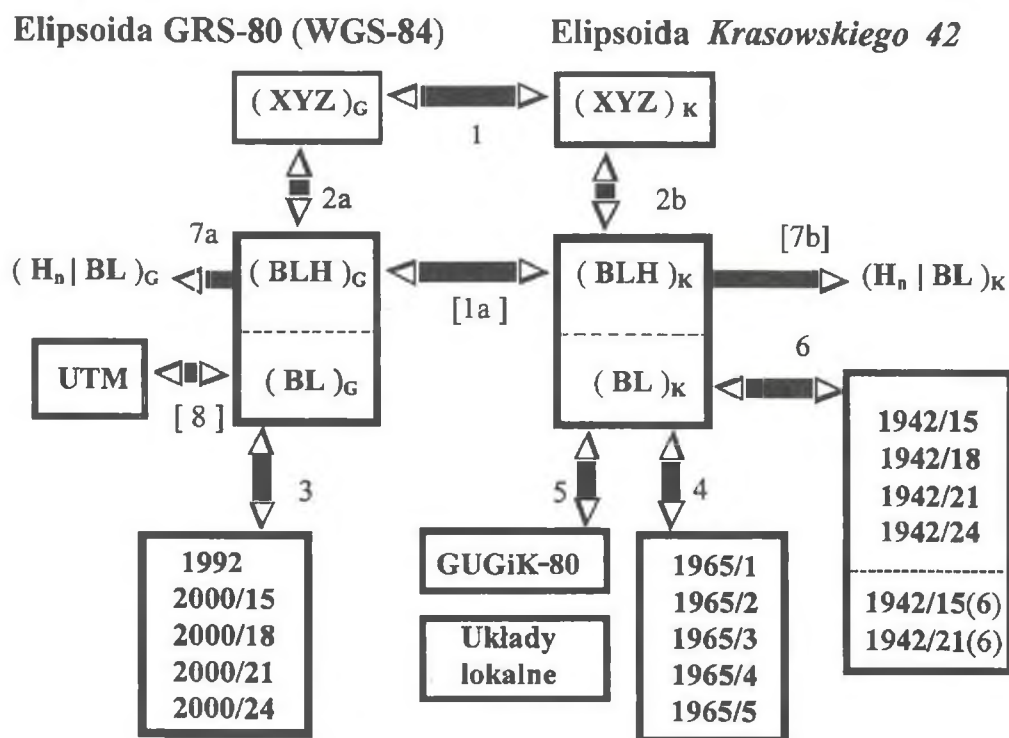
(\*) – parametry podstawowe  
 $a, b$  – półosie elipsoidy,  
 $f = (a - b)/a$  – spłaszczenie,  $b = a - f \cdot a$ ,  
 $R_0$  – promień sfery o długości południka równej długości południka elipsoidy (promień sfery *Lagrange'a*),  
 $b/a$  – stosunek półosi,  
 $n = (a - b) / (a + b)$  – trzecie spłaszczenie,  
 $e^2 = (a^2 - b^2) / a^2$  – kwadrat pierwszego mimośrodu elipsoidy,  
 $e'^2 = (a^2 - b^2) / b^2$  – kwadrat drugiego mimośrodu elipsoidy.

Wszystkie wielkości wynikają z parametrów wyjściowych ( $a, f$ ). Wyniki są zaokrąglone na ostatniej pozycji w zapisie liczb.

Dla elipsoidy WGS-84 przyjęto spłaszczenie  $f = 1 : 298.257\ 223\ 563$ , co powoduje, że półoś  $b$  tej elipsoidy jest o  $0.1\ mm$  krótsza od półosi elipsoidy GRS-80. Nie ma to istotnego skutku praktycznego. Półosie  $a$  obu elipsoid są z założenia identyczne.

## 2. Ogólny schemat bezpośrednich przejść transformacyjnych pomiędzy układami współrzędnych

2.1. Rys. 2.1 przedstawia bezpośrednie przejścia transformacyjne pomiędzy różnymi układami współrzędnych, wymienionymi w p. 1.4. Dwukierunkowe strzałki wskazują, że przejście pomiędzy dwoma oznaczonymi układami może się dokonywać w obu kierunkach, przy czym jedno z pary przejść (wg umowy) nazywamy transformacją „wprost”, zaś przeciwne - transformacją „odwrotną”.



Rys. 2.1. Schemat bezpośrednich przejść transformacyjnych pomiędzy układami współrzędnych

### [Objaśnienia dodatkowe i uwagi:

- Podstawowe przejścia transformacyjne oznaczone są strzałkami z przyporządkowanym pomocniczym numerem (identyfikatorem). Numer w nawiasie kwadratowym oznacza, że odpowiednia aplikacja nie jest w zasadzie przedmiotem niniejszych wytycznych, np. dla układu **UTM** (ang. *Universal Transverse Mercator projection*).
- Pomędzy układami odwzorowawczymi tej samej elipsoidy, a w szczególności - pomiędzy różnymi strefami tego samego układu, możliwe jest wzajemne dwukierunkowe przejście transformacyjne za pośrednictwem współrzędnych geodezyjnych  $B$ ,  $L$  lub poprzez zastosowanie bezpośrednich przekształceń konforemnych (np. przy wykorzystaniu wielomianów zespolonych). Dotyczy to przykładowo przejść pomiędzy sąsiednimi strefami układu „1965”.
- Pomędzy układami odwzorowawczymi różnych elipsoid (np. pomiędzy układem „1965” a układem „2000” możliwe jest - według zasad teoretycznych - przeliczenie współrzędnych przy pośrednim przejściu przez współrzędne elipsoidalne obu systemów (więcej uwag w tym zakresie - w treści wytycznych).

- \*) *Układy lokalne (zakładane w przeszłości dla dużych miast), definiowane były przez miejscowe płaszczyzny odwzorowania Gaussa-Krügera z południkiem osiowym przechodzącym przez środek obszaru. Poziom odniesienia układu lokalnego przyjmowano na podstawie ustalonego średniego poziomu nad poziom morza z zaokrągleniem do wielokrotności 100 m. Nowe układy lokalne tworzone tak, aby współrzędne punktów były wielkościami dodatnimi. W przypadku gdy dla znacznej części danego obszaru istniała przydatna osnowa geodezyjna oraz pokrycie kartograficzne w dawnym, lokalnym układzie współrzędnych, wielkości współrzędnych  $x, y$  nowego układu lokalnego dostosowywano, z zachowaniem izometrii, do wielkości współrzędnych dawnego układu lokalnego (wykonując równoległe przesunięcie i obrót płaszczyzny).*

**2.2.** Programy komputerowe realizujące konkretne odwzorowanie elipsoidy (np. przejścia transformacyjne typu **3, 4, 5, 6**), jako elementy geodezyjnych systemów technologicznych, w pełnym zakresie powinny obejmować następujące zadania:

- przekształcenie współrzędnych (odwzorowania „wprost” i „odwrotne”),
- wyznaczenie **elementarnej skali liniowej** lub wielkości pochodnej: **elementarnego zniekształcenia liniowego** (np. w cm/km),

[Ponieważ wszystkie wymienione układy współrzędnych charakteryzują się wiernością, więc elementarna skala liniowa nie zależy od kierunku i dla danego punktu stanowi lokalną charakterystykę zniekształcenia odwzorowawczego (obszar płaszczyzny układu odwzorowawczego może być charakteryzowany przykładowo za pomocą izolinii zniekształceń liniowych.)]

- wyznaczenie lokalnej **zbieżności południków (konwergencji)**,

[Parametr ten umożliwia:

- w zakresie pomiarów i opracowań sieci geodezyjnych redukowanie azymutów linii geodezyjnych (np. pochodzących z zasobów archiwalnych obserwacji) lub będących wynikiem opracowań wektorów GPS,
- w zakresie numerycznych opracowań kartograficznych analityczną zmianę orientacji osi znaków umownych przy przekształcaniu obrazu mapy z jednego odwzorowania w inne.]

- **redukcje odwzorowawcze** miar obserwacji geodezyjnych lub określonych elementów geometrycznych elipsoidy (redukcje kątowe, liniowe, polowe).

[Niezależnie od cechy wierności stosowanych odwzorowań redukcje kątów (kierunków) wynikają z nieprostoliniowego odwzorowania na płaszczyźnie łuków linii geodezyjnych - szczególnie w tym zakresie ujęte są w rozdziałach dotyczących konkretnych odwzorowań. Redukowanie miar obserwacji z elipsoidy na płaszczyznę odwzorowania (poprzedzone ich redukowaniem z fizycznej przestrzeni pomiarowej na geoidę i elipsoidę - zob. instrukcje techniczne G-1 i G-2), jest zawsze koniecznym etapem poprzedzającym proces wyrównania poziomej sieci geodezyjnej. Komplet formuł odwzorowawczych powinien więc „dostarczać narzędzi” do realizacji tego zadania.]

**2.3.** Przeliczenie współrzędnych pomiędzy dwoma dowolnymi układami wymienionymi na rys. 2.1 powinno być w zasadzie (zob. komentarz poniżej) złożeniem przekształceń elementarnych wskazanych przez symbole operacji.

---

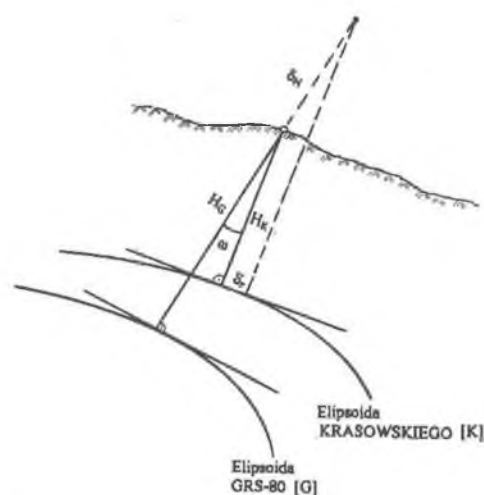
\*) tekst wprowadzony przez Departament Geodezji GUGiK

[Poprzez analityczne lub numeryczne złożenie operacji można oczywiście uzyskać wzory innych przejść transformacyjnych, np. **1a** (bezpośrednie przeliczenie współrzędnych geodezyjnych pomiędzy elipsoidami). W niniejszych wytycznych ograniczamy się do opisu wskazanych na rys. 2.1 przejść, traktowanych z natury rzeczy jako podstawowe (elementarne). Nie wyklucza to jednak stosowania w praktyce odpowiednich złożań analityczno-numerycznych, pod warunkiem że w obszarze zastosowań spełnią odpowiednie wymagania dokładności numerycznej - por. p. 1.7 niniejszych wytycznych.]

Przykładowo, chcąc przeliczyć współrzędne z układu „1965” do układu „2000”, należy przejść ścieżką obejmującą kolejne operacje: **4**, **2b**, **1**, **2a**, **3**, przy czym dla poprawnego wykonania operacji **2b** należy do współrzędnych geodezyjnych  $B, L$  (elipsoidy *Krasowskiego*) dołączyć przynajmniej przybliżoną informację o wysokości elipsoidalnej  $H$ . Załóżmy, że wysokość ta została określona z pewnym błędem  $\delta_H$  (rys. 2.2) i oszacujmy, jak wielce błąd ten wpływa na transformowane współrzędne płaskie. Z informacji o wzajemnym położeniu elipsoid wynika, że maksymalna kątowna rozwartość normalnych (poprowadzonych z tego samego punktu na powierzchni ziemi do obu elipsoid) ma wartość rzędu  $5''$ . Łatwo wyliczamy, że wpływ błędu wysokości na przesunięcie „poziome” punktu wynosi:

$$\delta_r \approx \delta_H \cdot \omega'' / 206265, \quad (2.1)$$

tj. ok.  $0.24$  mm na  $10$  m błędu wysokości (i odpowiednio proporcjonalnie). Dla wielu zadań geodezyjnych, za wyjątkiem problematyki osnów wyższych klas (np. w zadaniach przekształceń kartograficznych), wielkość ta może być zaniedbywalna, nawet także wtedy, gdy się założy, że punkt transformowany leży wprost na elipsoidzie ( $H=0$ ). Jednakże z wystarczającą dokładnością (przy wykonywaniu przekształcenia **2b**) wysokość elipsoidalną (tutaj względem elipsoidy *Krasowskiego*) można by zastąpić wysokością normalną  $H_n$ , ponieważ elipsoida *Krasowskiego* i geoida niwelacyjna (quasi-geoida) odchylają się wzajemnie co najwyżej o kilka metrów. Popelniany z tego tytułu błąd numeryczny przeliczonych współrzędnych ma wartość rzędu dziesiątych części milimetra.



Rys. 2.2. Wpływ błędu wysokości na poziome przesunięcie punktu przy przejściu pomiędzy układami elipsoidalnymi

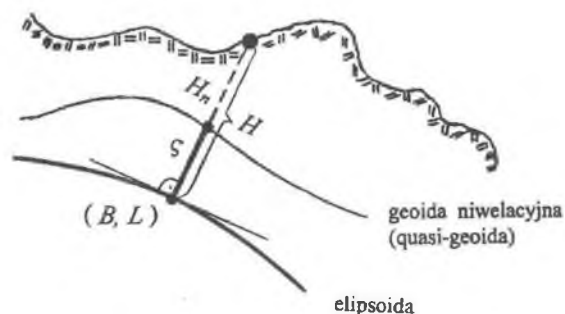
2.4. Operacja oznaczona na schemacie przez 7a (dla elipsoidy *Krasowskiego* 7b) dotyczy przeliczenia wysokości elipsoidalnej  $H$  na wysokość normalną  $H_n$ . W zapisie przekształcenia odnotowano fakt, że różnica pomiędzy wysokością elipsoidalną a normalną, czyli odstęp geoidy niwelacyjnej (quasi-geoidy) od elipsoidy jest wielkością zależną od położenia poziomego, określonego przez współrzędne  $B, L$  (rys. 2.3):

$$H - H_n = s(B, L) \quad (2.2)$$

Odstęp  $s$  zależny od położenia punktu (zamiast współrzędnych  $B, L$  jako parametrów położenia używa się też współrzędnych płaskich  $x, y$ ) jest informacją pozyskiwaną z numerycznego modelu geoidy niwelacyjnej.

[Należy wyjaśnić, że wprowadzenie do zastosowań odpowiedniego modelu numerycznego geoidy niwelacyjnej jest kwestią odrębnej decyzji GUGiK. Zmiany w tym zakresie mogą wynikać z pozyskiwania i uwzględniania nowych zbiorów informacji ulepszających dokładnościowo aktualny model geoidy. Numeryczny model geoidy niwelacyjnej może być realizowany praktycznie przez program komputerowy określający wielkość odstępu na podstawie zadanych współrzędnych geodezyjnych  $B, L$ . Inną formą modelu może być dyskretny zbiór punktów geoidy rozmieszczonych w regularnej siatce kwadratów, np. o oczku  $1' \times 1'$ , pokrywającej obszar Polski. Odstępy w punktach pośrednich znajdujemy wtedy drogą interpolacji (zob. rozdział 8 niniejszych wytycznych). Graficzną formą modelu geoidy może być mapa izolinii jednakowych odstępów. Interpolacja graficzna staje się tu sposobem pozyskiwania odstępów dla punktów pośrednich. Każda z tych metod, zależnie od założonej rozdzielczości modelu lub skali, charakteryzuje się stosowną dokładnością (błędnością), przy czym na błędność interpolacyjną nakłada się również błędność samego modelu geoidy.]

Ze wzoru (2.2) wynika również zależność odwrotna, tzn. dysponując wielkością odstępu  $s$ , możemy przeliczyć wysokość normalną danego punktu na odpowiadającą wysokość elipsoidalną.

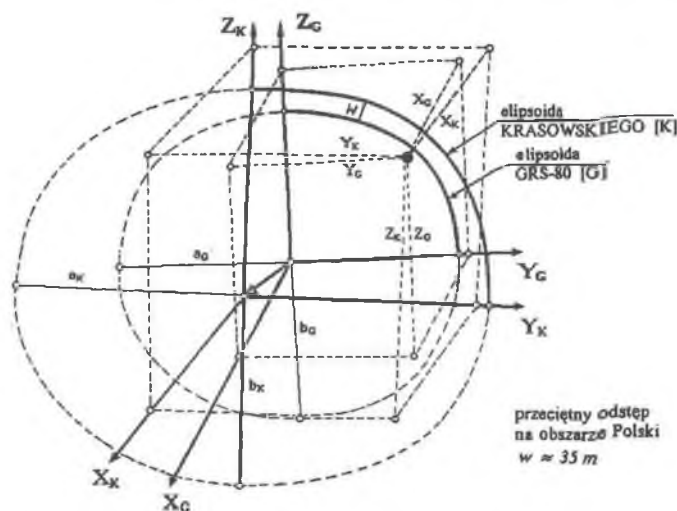


Rys. 2.3. Odstęp geoidy niwelacyjnej od elipsoidy jako funkcja położenia

### 3. Transformacja współrzędnych kartezjańskich pomiędzy elipsoidami GRS-80 i *Krasowskiego* (operacja 1)

3.1. Operacja powyższa, jak wynika z rysunku 2.1, występuje na ścieżce przejścia z układu odwzorowawczego jednej elipsoidy do układu odwzorowawczego drugiej elipsoidy. Jest to transformacja trójwymiarowa przez podobieństwo, zdefiniowana jednoznacznie przez 7 parametrów, tj. 3 składowe przesunięcia wzajemnego środków elipsoid, 3 kąty obrotów osi jednego układu względem drugiego oraz 1 parametr zmiany skali.

[ Konkretnie wartości parametrów transformacji, które podane będą w niniejszym rozdziale, zostały wyznaczone w oparciu o punkty sieci POLREF posiadające współrzędne zarówno na elipsoidzie GRS-80 (w systemie ETRF-89), jak też na elipsoidzie *Krasowskiego* (w systemie PUŁKOWO 42). Dokonano estymacji tych parametrów, stosując metodę najmniejszych kwadratów. Obliczenia wykonano w roku 1997 w Centralnym Ośrodku Dokumentacji Geodezyjnej i Kartograficznej GUGiK. W ten sposób uzyskano niejako nową definicję lokalizacyjną elipsoidy *Krasowskiego* (jako już elipsoidy lokalnej) względem elipsoidy GRS-80 (WGS-84) systemu ETRF-89. Dokładność określenia parametrów transformacji wynika głównie z błędności pozycji wyznaczonych metodami klasycznymi (na elipsoidzie *Krasowskiego*). Wprowadzenie parametru zmiany skali miało na celu lepsze wpasowanie współcześnie wyznaczanych (przy wykorzystaniu techniki GPS) zbiorów punktów w odpowiadające punkty „archiwalne” wyznaczone dawnymi (klasycznymi) metodami.]



Rys. 3.1. Ilustracja wzajemnego położenia układów kartezjańskich związanych z elipsoidami: GRS-80 i *Krasowskiego*

3.2. Transformację współrzędnych kartezjańskich, związanych z elipsoidą GRS-80, na odpowiadające współrzędne kartezjańskie, związane z elipsoidą *Krasowskiego* (rys. 3.1), czyli przekształcenie:

$$(XYZ)_G \Rightarrow (XYZ)_K$$

możemy zrealizować praktycznie za pomocą prostej formuły liniowej:

$$\begin{aligned} X_K &= X_G + c_{11} \cdot X_G + c_{12} \cdot Y_G + c_{13} \cdot Z_G + T_x \\ Y_K &= Y_G + c_{21} \cdot X_G + c_{22} \cdot Y_G + c_{23} \cdot Z_G + T_y, \\ Z_K &= Z_G + c_{31} \cdot X_G + c_{32} \cdot Y_G + c_{33} \cdot Z_G + T_z, \end{aligned} \quad (3.1)$$



która w notacji macierzowej ma postać:

$$\mathbf{R}_K = \mathbf{R}_G + \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}_G + \mathbf{T} = (\mathbf{I} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{R}_G + \mathbf{T} \quad (3.1a)$$

gdzie:  $\mathbf{I}$  oznacza macierz jednostkową;  $X_K, Y_K, Z_K$  - wynikowe współrzędne punktu w układzie elipsoidy *Krasowskiego*;  $\mathbf{R}_K$  - wektor tych współrzędnych;  $X_G, Y_G, Z_G$  - dane współrzędne kartezjańskie centryczne punktu w układzie elipsoidy GRS-80, jako składowe wektora  $\mathbf{R}_G$ ;  $T_x, T_y, T_z$  - składowe wektora  $\mathbf{T}$  przesunięcia początku układu GRS-80 względem środka układu elipsoidy *Krasowskiego*;  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) - elementy macierzy  $\mathbf{C}$  (są one funkcjami 3 kątów obrotów wokół osi oraz parametru zmiany skali).

Parametry transformacji (3.1) (estymowane w oparciu o dane współrzędne punktów POLREF na obu elipsoidach) są następujące:

$$T_x = -33.4297 \quad T_y = +146.5746 \quad T_z = +76.2865 \quad [\text{m}] \quad (3.1b)$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= + 0.84076440 \cdot 10^{-6} & c_{12} &= + 4.08960694 \cdot 10^{-6} & c_{13} &= + 0.25613907 \cdot 10^{-6} \\ c_{21} &= - 4.08960650 \cdot 10^{-6} & c_{22} &= + 0.84076292 \cdot 10^{-6} & c_{23} &= - 1.73888787 \cdot 10^{-6} \\ c_{31} &= - 0.25614618 \cdot 10^{-6} & c_{32} &= + 1.73888682 \cdot 10^{-6} & c_{33} &= + 0.84077125 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

**[Przekształcenie uproszczone dla małych kątów obrotów (formuła Burśy-Wolfa):** Formułę (3.1) można sprowadzić do postaci wykorzystującej wartości 7 definicyjnych parametrów transformacji konforemnej: współczynnik zmiany skali  $\delta m$ , kąty obrotów wokół osi  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$  oraz wykorzystywane już 3 składowe wektora translacji  $T_x, T_y, T_z$ . Dla małych kątów obrotów (taki status przyjmuje się zwykle w rozważanym zadaniu transformacji przestrzennej) formuła przekształcenia współrzędnych przyjmie postać:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_K = (1 + \delta m) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 1 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Wartości parametrów są następujące:

$$\begin{aligned} \delta m &= 0.8407728 \cdot 10^{-6} \\ \epsilon_x &= - 1.7388854 \cdot 10^{-6} \quad [\text{rad}] = -0.35867'' \\ \epsilon_y &= - 0.2561460 \cdot 10^{-6} \quad [\text{rad}] = -0.05283'' \\ \epsilon_z &= 4.0896031 \cdot 10^{-6} \quad [\text{rad}] = 0.84354'' \end{aligned} \quad (3.2a)$$

(składowe  $T_x, T_y, T_z$  są identyczne jak w (3.1b).)

**3.3.** Transformację współrzędnych kartezjańskich elipsoidy *Krasowskiego* na odpowiadające współrzędne kartezjańskie elipsoidy GRS-80, czyli przekształcenie odwrotne:

$$(\mathbf{XYZ})_K \Rightarrow (\mathbf{XYZ})_G$$

realizujemy praktycznie za pomocą analogicznej do (3.1) formuły liniowej:

$$\begin{aligned}
X_G &= X + d_{11} \cdot X + d_{12} \cdot Y + d_{13} \cdot Z \\
Y_G &= Y + d_{21} \cdot X + d_{22} \cdot Y + d_{23} \cdot Z \\
Z_G &= Z + d_{31} \cdot X + d_{32} \cdot Y + d_{33} \cdot Z,
\end{aligned}
\tag{3.3}$$

lub w notacji macierzowej,

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{R} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{I} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{R},
\tag{3.3a}$$

przy czym (z przekształcenia zależności (3.1a))

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_K - \mathbf{T}.
\tag{3.3c}$$

Z ostatniej zależności wynika, że za współrzędne  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  jako składowe wektora  $\mathbf{R}$  podstawiamy:

$$\begin{aligned}
X &= X_K - T_x \\
Y &= Y_K - T_y \\
Z &= Z_K - T_z,
\end{aligned}$$

Elementy macierzy  $\mathbf{D}$ , wynikające z zależności  $(\mathbf{I} + \mathbf{D}) = (\mathbf{I} + \mathbf{C})^{-1}$ , otrzymują następujące wartości:

$$\begin{aligned}
d_{11} &= -0.84078048 \cdot 10^{-6} & d_{12} &= -4.08959962 \cdot 10^{-6} & d_{13} &= -0.25614575 \cdot 10^{-6} \\
d_{21} &= +4.08960007 \cdot 10^{-6} & d_{22} &= -0.84078196 \cdot 10^{-6} & d_{23} &= +1.73888389 \cdot 10^{-6} \\
d_{31} &= +0.25613864 \cdot 10^{-6} & d_{32} &= -1.73888494 \cdot 10^{-6} & d_{33} &= -0.84077363 \cdot 10^{-6}
\end{aligned}$$

[Dla podanych wartości parametrów, ortogonalność macierzy  $\mathbf{I} + \mathbf{D}$ , podobnie jak ortogonalność macierzy  $\mathbf{I} + \mathbf{C}$ , zachodzi z precyzją wyższą niż wymagania praktyczne (błąd nieortogonalności objawia się nieistotnym błędem przesunięcia punktu rzędu  $10^{-6}$  m.)]

**3.4.** Jeśli  $\mathbf{Q}_G$  jest macierzą kowariancyjną wektora współrzędnych  $\mathbf{R}_G$  (na przykład jako współrzędnych otrzymanych z wyrównania sieci wektorowej GPS), to w wyniku przekształcenia (3.1), ale przy założeniu bezbłędności parametrów transformacji zachodzi przybliżona równość  $\mathbf{Q}_G \approx \mathbf{Q}_K$ , gdzie  $\mathbf{Q}_K$  jest macierzą kowariancyjną wektora  $\mathbf{R}_K$ .

[Powyższa przybliżona równość wynika więc wyłącznie z propagacji błędności współrzędnych pierwotnych i nie obejmuje wpływu błędności samych parametrów przekształcenia (3.1). Taka interpretacja ma znaczenie w ocenie dokładności wewnętrznej sieci wektorowych GPS, transformowanych na przykład do układu „1965” (dokładność ta pozostaje niezmienna). Tak więc transformację (3.1) o konkretnych parametrach liczbowych, obowiązującą dla całego obszaru Polski, pomimo jej empirycznej (estymacyjnej) genezy, traktujemy jako arbitralną formułę matematyczną. Jej „adekwatność” w stosunku do archiwalnych współrzędnych punktów w układzie „1965” ujawni się dopiero na etapie „wpasowania” sieci GPS do punktów dostosowania w tym układzie.]

## TEST KONTROLNY TRANSFORMACJI WSPÓLRZĘDNYCH KARTEZJAŃSKICH - GEOCENTRYCZNYCH POMIĘDZY UKŁADAMI ELIPSOID: GRS-80 i KRASOWSKIEGO

### Dane współrzędne X,Y,Z w układzie elipsoidy GRS-80

Nr	X	Y	Z
1	3934651.0000	1092101.0000	4883731.0000
2	3687749.0000	1619518.0000	4929337.0000
3	3680670.0000	1284895.0000	5031331.0000
4	3569564.0000	1005907.0000	5171785.0000
5	3404844.0000	1504359.0000	5161940.0000

(punkty wybrane z całego obszaru Polski)

### Współrzędne X,Y,Z po transformacji do układu elipsoidy KRASOWSKIEGO:

Nr	X	Y	Z
1	3934626.59559263	1092223.90936313	4883812.28379483
2	3687726.55661592	1619642.28322409	4929419.30250052
3	3680646.20831226	1285018.85347967	5031412.80819587
4	3569539.00992278	1006030.82906297	5171866.46961638
5	3404820.90738314	1504483.93890226	5162022.37028300

### Kontrolny powrót do X,Y,Z - GRS-80

Nr	X	Y	Z
1	3934651.00000001	1092100.99999997	4883731.00000002
2	3687749.00000001	1619517.99999997	4929337.00000003
3	3680670.00000002	1284894.99999997	5031331.00000002
4	3569564.00000001	1005906.99999997	5171785.00000002
5	3404844.00000001	1504358.99999996	5161940.00000003

### Uwagi:

- „Nadwymiarowa” ilość cyfr ukazuje jedynie poziom błędu numerycznego.
- Wszelkie stałe i zmienne rzeczywiste były zapisywane na długości 8 bajtów

Błąd numeryczny:  $|\varepsilon| < 10^{-7}$  [m]

**TEST DOKUMENTACYJNY  
DLA 11 PUNKTÓW SIECI EUREF-POL**

[podane zbiory współrzędnych stanowią alternatywną (dyskretną) informację o położeniu elipsoidy KRASOWSKIEGO względem GRS-80]

**Dane współrzędne X,Y,Z w układzie elipsoidy GRS-80**

Nr	X	Y	Z
216	3738397.180	1148285.751	5021752.207
217	3633815.667	1397453.930	5035280.798
301	3495579.623	1157845.533	5190403.614
302	3524523.267	1329693.458	5129846.189
303	3475730.662	1453976.538	5129448.807
304	3635006.809	1051224.494	5117503.217
306	3664940.623	1409153.720	5009571.367
307	3846614.367	1106083.899	4949572.478
308	3803542.932	1352681.133	4921845.791
309	3717652.591	1622948.940	4905872.913
310	3866100.293	1479953.023	4836446.401

**Współrzędne X,Y,Z po transformacji do układu elipsoidy KRASOWSKIEGO:**

Nr	X	Y	Z
216	3738372.87572	1148409.27020	5021833.75481
217	3633792.29725	1397578.06286	5035362.81725
301	3495555.19686	1157969.76000	5190485.38243
302	3524499.55247	1329817.81642	5129928.19792
303	3475707.41462	1454101.20114	5129531.04420
304	3634982.04537	1051348.18792	5117584.70302
306	3664917.32068	1409277.78012	5009653.37700
307	3846589.96262	1106207.06566	4949653.86402
308	3803519.49279	1352804.73135	4921927.59354
309	3717630.18078	1623073.14462	4905955.19408
310	3866077.40501	1480076.62102	4836528.33703

#### 4. Przeliczenie współrzędnych geodezyjnych B,L,H na współrzędne kartezjańskie X,Y,Z oraz zadanie odwrotne (operacje 2a lub 2b)

4.1. Do przeliczania współrzędnych geodezyjnych  $B, L, H$  na współrzędne kartezjańskie  $X, Y, Z$  dla tej samej elipsoidy odniesienia stosujemy następujące formuły:

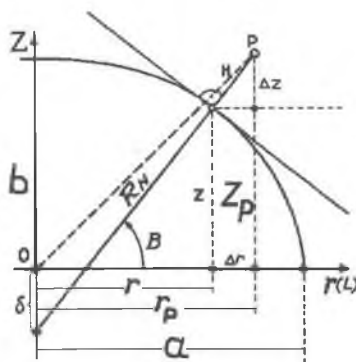
$$\begin{aligned} X &= (R_N + H) \cdot \cos(B) \cdot \cos(L) = r_P \cdot \cos(L) \\ Y &= (R_N + H) \cdot \cos(B) \cdot \sin(L) = r_P \cdot \sin(L) \\ Z &= [R_N \cdot (1 - e^2) + H] \cdot \sin(B) \end{aligned} \quad (4.1)$$

gdzie:

$R_N$  - promień krzywizny przekroju w pierwszym wertykale wyrażony wzorem:

$$R_N = a / [1 - e^2 \cdot \sin^2(B)]^{1/2} \quad (4.2)$$

$e^2 = (a^2 - b^2) / a^2$  - kwadrat pierwszego mimośrodu elipsoidy,  $a, b$  - półosie elipsoidy. (4.2a)



Rys. 4.1. Elementy geometryczne przekroju południkowego elipsoidy odniesienia

Wielkość pomocnicza  $r_P$  (odległość punktu od osi obrotu elipsoidy) spełnia użyteczne w algorytmach obliczeniowych zależności (rys. 4.1):

$$r_P = (X^2 + Y^2)^{1/2} = (R_N + H) \cdot \cos(B) = r + \Delta r, \quad (4.3)$$

$$[ X = r_P \cdot \cos(L), Y = r_P \cdot \sin(L) ],$$

gdzie:

$$r = R_N \cdot \cos(B) - \text{promień równoleżnika elipsoidy dla danej szerokości } B, \quad (4.3a)$$

$$\Delta r = H \cdot \cos(B) \quad (4.3b)$$

Podobnie możemy zapisać:

$$Z = z + \Delta z, \quad (4.4)$$

gdzie:

$$z = R_N \cdot \sin(B) - \delta, \quad (4.4a)$$

$$\delta = R_N \cdot e^2 \cdot \sin(B) - \text{długość odcinka osi obrotu elipsoidy} \quad (4.4b)$$

od jej środka do punktu przecięcia z normalną,

$$\Delta z = H \cdot \cos(B) \quad (4.4c)$$

Parametry  $a, b, e$  dla elipsoid GRS-80 i *Krasowskiego* są podane w tabeli 1.1.

**4.2.** Przeliczenie współrzędnych kartezjańskich  $X, Y, Z$  na odpowiadające współrzędne geodezyjne  $B, L, H$ , czyli zadanie odwrotne do (4.1) realizujemy zwykle przy wykorzystaniu metod iteracyjnych (kolejnych przybliżeń). Istnieje jednak wiele alternatywnych sposobów rozwiązania tego zadania, które można znaleźć w podręcznikach geodezji. Zilustrujemy przykładowo sposób polegający na wyznaczeniu w pierwszej kolejności promienia równoleżnikowego  $r$  przy wykorzystaniu szybkiej procedury iteracyjnej *Newtona*:

Ze związków (4.1) otrzymuje się łatwo równanie na szukany promień równoleżnikowy  $r$ :

$$F(r) = w^{1/2}(r) \cdot c(r) - Z \cdot r \cdot b / a = 0, \quad (4.5)$$

gdzie przyjęto następujące pomocnicze funkcje:

$$w(r) = (a - r) \cdot (a + r) \quad (4.5a)$$

$$c(r) = r_p - e^2 \cdot r \quad (4.5b)$$

Do rozwiązania powyższego równania stosujemy drogę kolejnych przybliżeń (iteracji). Jako przybliżenie początkowe (startowe)  $r_0$  dla szukanego promienia  $r$  przyjmujemy wartość  $r_p$  obliczoną ze wzoru (4.3) (zakładamy chwilowe uproszczenie:  $H=0$ ):

$$r_0 = r_p = (X^2 + Y^2)^{1/2} \quad (4.6)$$

Kolejne przybliżenia  $r_1, r_2, r_3, \dots$  wyznaczamy przy wykorzystaniu formuły *Newtona*:

$$r_{k+1} = r_k - F(r_k) \cdot [F'(r_k)]^{-1} \quad (4.7)$$

$(k = 0, 1, 2, \dots - \text{wskaźnik iteracji})$

gdzie  $F'(r)$  jest pochodną funkcji  $F(r)$  wyrażającą się wzorem:

$$F'(r) = -Z \cdot b / a - e^2 \cdot w(r) - r \cdot c(r) / w(r) \quad (4.8)$$

Iteracje zatrzymujemy, jeśli wartość bezwzględna różnicy ostatnich przybliżeń nie przekracza pewnego założonego błędu numerycznego  $\varepsilon : |r_{k+1} - r_k| \leq \varepsilon$ . Jak wykazują testy numeryczne, błąd mniejszy od 0.00005 m uzyskuje się już po 1, 2 lub co najwyżej 3 iteracjach.

Końcowy etap obejmuje już bezpośrednio wyznaczenie współrzędnych geodezyjnych  $B, L, H$  przy zastosowaniu wzorów (współrzędne  $B, L$  będą wyrażone w sekundach stopniowych):

$$B'' = [\pi/2 - \text{arc tg} \{ b \cdot r / (a \cdot w(\dot{r})) \}] \cdot \rho'' \quad (4.9)$$

[ze znakiem ujemnym dla  $Z < 0$ ]

$$L = \text{arc cos} (X/r_p) \cdot \rho'' = \text{arc sin} (Y/r_p) \cdot \rho'' \quad (4.10)$$

$$\rho'' = 648000 / 3.141592653589793 = 206264.8062470964$$

(uwaga na ilość cyfr znaczących),

$$H = (\Delta r^2 + \Delta z^2)^{1/2} \cdot (-1 \text{ jeśli } \Delta r < 0 \text{ lub } \Delta z < 0) \quad (4.11)$$

przy czym

$$\Delta r = r_p - r = (X^2 + Y^2)^{1/2} - r, \quad (4.12)$$

$$\Delta z = Z - z = Z - b \cdot w(\dot{r}) / a \quad (4.13)$$

**Przykład przeliczenia (BLH)  $\Rightarrow$  (XYZ)  
i transformacji odwrotnej dla elipsoidy GRS-80**

**Dane:**

$$B = 52^\circ 24' 57.7895'' \quad L = 19^\circ 14' 37.4375'' \quad H = 200.0000 \text{ m}$$

**Obliczone współrzędne kartezjańskie-geocentryczne:**

$$X = 3680670.2508737 \quad Y = 1284895.8967929 \quad Z = 5031331.0084728$$

**Przeliczenie odwrotne (iteracyjne)**

Iteracja	$F(r)$	$F'(r)$	$r$
0		(wart. początk.)	3898498.552168757
1	-980607473.5048237	-8038852.820382185	3898376.568659989
2	-9034.2217541	-8038704.699748515	3898376.567536148
3	0.0004082	-8038704.698383911	3898376.567536148 (stop).

**Wyniki powrotu:**

$$B = 52^\circ 24' 57.78950000'' \quad L = 19^\circ 14' 37.43750000'' \quad H = 200.00000000 \text{ m}$$

oszacowanie błędu numerycznego:

$$|e| < 0.000000005'' \quad |e| < 0.000000005'' \quad |e| < 0.000000005 \text{ m}$$

Inna, znana metoda polega na rozwiązaniu w pierwszej kolejności równania ze względu na szerokość geodezyjną  $B$ :

$$\text{tg}(B) = (Z + \delta) / r_p \quad (4.14)$$

gdzie wielkość  $\delta$  jako funkcja  $B$  jest wyrażona wzorem (4.4b) (formuła iteracyjna ma postać:

$$B_{k+1} = \text{arc tg} [ (Z + \delta_k) / r_p ], k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.14a)$$

przy czym:  $\delta_k = a \cdot e \cdot c_k \wedge (1 - c_k^2)^{1/2}$ ,  $c_k = e \cdot \sin(B_k)$ . Przybliżenie początkowe  $B_0$  wyznaczamy przy założeniu  $\delta = 0$ . W etapie końcowym obliczamy  $L$  i  $H$  (jak poprzednio).

**TEST KONTROLNY PRZELICZENIA WSPÓLRZĘDNYCH  
GEODEZYJNYCH B,L,H NA WSPÓLRZĘDNE KARTEZJAŃSKIE  
X, Y, Z ORAZ ZADANIE ODWROTNE  
DLA ZBIORU PUNKTÓW**

**Dane współrzędne geodezyjne w układzie elipsoidy GRS-80:**

Nr	B			L			H [m]
	°	'	"	°	'	"	
1	50	17	22.1233	15	30	45.0856	400.0000
2	50	56	11.8546	23	42	33.2564	300.0000
3	52	24	57.7895	19	14	37.4375	200.0000
4	54	32	18.4326	15	44	16.4322	50.0000
5	54	23	10.6577	23	50	14.0751	50.0000

**Przeliczone współrzędne kartezjańskie (GRS-80)**

Nr	X	Y	Z [m]
1	3934651.339208	1092101.630266	4883731.630968
2	3687749.750712	1619518.167248	4929337.704360
3	3680670.250874	1284895.896793	5031331.008473
4	3569565.002333	1005907.552931	5171785.257732
5	3404844.289932	1504359.746720	5161940.507240

**Kontrolny powrót do współrzędnych geodezyjnych**

1	50	17	22.12330000	15	30	45.08560000	400.00000001
2	50	56	11.85460000	23	42	33.25640000	300.00000004
3	52	24	57.78950000	19	14	37.43750000	200.00000000
4	54	32	18.43260000	15	44	16.43220000	50.00000003
5	54	23	10.65770000	23	50	14.07510000	50.00000003

**Uwagi:**

Charakterystyka błędu numerycznego we współrzędnych B,L:  $|\varepsilon| < 0.5 \cdot 10^{-8} ["]$

Błąd obliczenia wysokości  $|\varepsilon| < 0.5 \cdot 10^{-7} [m]$

**4.3. Propagacja błędów średnich przy przeliczaniu współrzędnych:** Niech  $\delta X$ ,  $\delta Y$ ,  $\delta Z$  oznaczają różniczkowe przyrosty współrzędnych kartezjańskich geocentrycznych, zaś  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta H$  odpowiadające przyrosty: długości łuku południka, długości łuku równoleżnika, wysokości elipsoidalnej,

$$\delta u = (R_M + H) \cdot \delta B \approx R_M \cdot \delta B, \delta v = (R_N + H) \cdot \cos(B) \cdot \delta L \approx R_N \cdot \cos(B) \cdot \delta L \quad (4.15)$$

( $\delta B$ ,  $\delta L$  - przyrosty różniczkowe współrzędnych geodezyjnych).



Zachodzą następujące związki (w notacji macierzowej):

$$\begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{bmatrix} = S \cdot \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta H \end{bmatrix} \text{ lub } \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta H \end{bmatrix} = S^T \cdot \begin{bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

gdzie  $S$  jest  $(3 \times 3)$  macierzą ortonormalną:

$$S = \begin{bmatrix} -\sin(B) \cdot \cos(L) & -\sin(L) & \cos(B) \cdot \cos(L) \\ -\sin(B) \cdot \sin(L) & \cos(L) & \cos(B) \cdot \sin(L) \\ \cos(B) & 0 & \sin(B) \end{bmatrix} \quad (S^{-1} = S^T) \quad (4.17)$$

oraz - na podstawie (4.16) - stosowne zależności pomiędzy odpowiadającymi macierzami kowariancyjnymi wektorów współrzędnych:

$$Q_R = S \cdot Q_e \cdot S^T \quad Q_e = S^T \cdot Q_R \cdot S \quad (4.18)$$

gdzie:  $Q_R$  jest macierzą kowariancyjną wektora współrzędnych kartezjańskich geocentrycznych, zaś  $Q_e$  - macierzą kowariancyjną współrzędnych  $u, v, H$ . Formuła powyższa pozwala określić błędy średnie współrzędnych wyznaczanych, gdy znane są błędy średnie (lub pełna macierz kowariancyjna) współrzędnych danych.

[Na przekątnej macierzy kowariancyjnej występują kwadraty błędów średnich odpowiednich współrzędnych. Błędy średnie współrzędnych  $u, v$  stanowią równocześnie przybliżone wartości błędów średnich współrzędnych na płaszczyźnie odwzorowawczej.]

### Przykład wyznaczenia macierzy kowariancyjnej $Q_e$

Dane współrzędne kartezjańskie punktu w układzie elipsoidy GRS-80:

$X = 3780028.2419$   $Y = 1564212.2723$   $Z = 4877254.9889$

Dana macierz kowariancyjna

$$Q_R = \begin{bmatrix} +0.1222E-04 & +0.3388E-20 & +0.0000E+00 \\ +0.3388E-20 & +0.5153E-05 & -0.2576E-05 \\ +0.0000E+00 & -0.2576E-05 & +0.2784E-04 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Błędy średnie} \\ \mu_X \quad \mu_Y \quad \mu_Z \\ 0.0035 \quad 0.0023 \quad 0.0053 \end{array}$$

Obliczone współrzędne geodezyjne:

$B = 50^\circ 12' 1.78831''$   $L = 22^\circ 28' 48.88289''$   $H = 209.2623m$

Obliczona macierz kowariancyjna współrzędnych  $u, v, H$  i błędy średnie

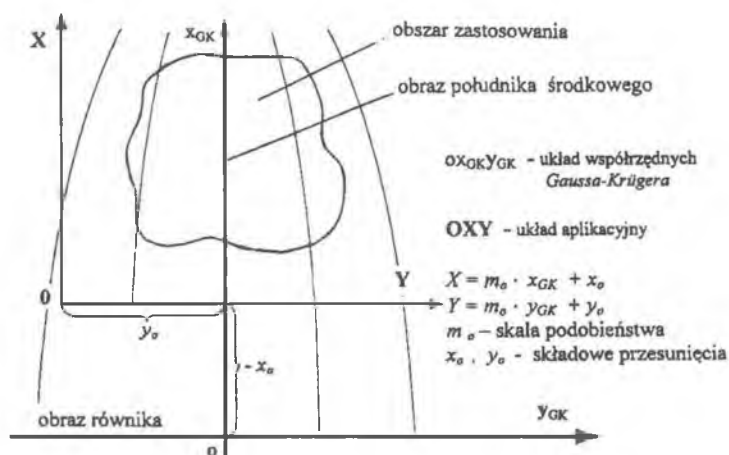
$$Q_e = \begin{bmatrix} +0.1898E-04 & +0.0039E-04 & +0.1350E-04 \\ +0.0039E-04 & +0.0619E-04 & -0.0066E-04 \\ +0.1350E-04 & -0.0066E-04 & +0.1577E-04 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Błędy średnie (w metrach)} \\ \mu_u \quad \mu_v \quad \mu_H \\ 0.0044 \quad 0.0025 \quad 0.0040 \end{array}$$

## 5. Aplikacje odwzorowania *Gaussa-Krügera* do realizacji układów współrzędnych: „1992” i „2000” oraz układu „1942”

5.1. Zgodnie z informacjami podanymi w rozdziale 1 układy: „1992”, „2000” są oparte na odwzorowaniu *Gaussa-Krügera* elipsoidy GRS-80, natomiast układ „1942” - na analogicznym odwzorowaniu elipsoidy *Krasowskiego*. Istotną kwestią proceduralną jest więc matematyczna realizacja odwzorowania *Gaussa-Krügera*, prowadząca do wyznaczenia płaskich współrzędnych kartezjańskich  $x_{GK}$ ,  $y_{GK}$  w oparciu o współrzędne geodezyjne  $B, L$ , przy czym dla kompletności przekształcenia (transformacji) „wprost” będzie towarzyszyć zawsze przekształcenie odwrotne, co zapiszemy w ogólności:

$$(B, L) \Leftrightarrow (x_{GK}, y_{GK})$$

Odcięta  $x_{GK}$  jest mierzona względem obrazu równika jako osi  $Oy$  płaskiego układu, zaś rzędna  $y_{GK}$  względem obrazu południka środkowego jako osi  $Ox$  tegoż układu. Długość geodezyjna południka środkowego, którą oznaczamy  $L_0$ , stanowi więc parametr „lokalizujący” odwzorowanie *Gaussa-Krügera* na danej elipsoidzie. Parametry liczbowe formuł odwzorowawczych będą zależne również od parametrów geometrycznych (definicyjnych) elipsoidy ( $a, b$ ) lub ( $a, f$ ) (por. tab. 1.1). Konkretnie aplikacje odwzorowania *Gaussa-Krügera* (jak np. w postaci układów: „1992”, „2000”, „1942”) będą już związane ze skalowaniem i przesunięciem układu współrzędnych  $x_{GK}, y_{GK}$ .



Rys. 5.1. Ogólna zasada aplikacji odwzorowania *Gaussa-Krügera*

Wielkość  $m_0$ , zwana skalą na południku środkowym, pełni równocześnie funkcję skali podobieństwa konkretnej aplikacji względem oryginalnego odwzorowania *Gaussa-Krügera*.

Jeśli  $m_0 < 1$ , to parametr ten ma na celu równomierne rozłożenie (w interesującym nas obszarze) bezwzględnych wartości zniekształceń liniowych odwzorowania. Parametry przesunięcia układu współrzędnych oznaczone  $x_0$ ,  $y_0$  mają zasadniczo dwa cele: w przypadku  $y_0$  chodzi o to, by zapobiec występowaniu ujemnych wartości rzędnych, zaś w przypadku  $x_0$  obcięcie dużych wartości  $x_{GK}$  (mierzonych od obrazu równika) lub szczególne wyróżnienie danej strefy układu. Podamy najpierw

parametry aplikacyjne odwzorowania dla konkretnych układów współrzędnych, a następnie skupimy się na samej technice odwzorowania *Gaussa-Krügera*.

**5.1.1. Dla jednostrefowego układu „1992”,** zgodnie z informacjami podanymi już w p. 1.4.3, obowiązują następujące formuły aplikacyjne:

$$X_{1992} = m_o \cdot x_{GK} + x_o, \quad x_o = - 5\,300\,000 \text{ m},$$

$$Y_{1992} = m_o \cdot y_{GK} + y_o, \quad y_o = 500\,000 \text{ m}$$

$$m_o = 0.9993$$

przy czym odwzorowanie *Gaussa-Krügera*, wyznaczające  $x_{GK}$ ,  $y_{GK}$  jest realizowane przy założeniu południka środkowego  $L_o = 19^\circ$  na elipsoidzie GRS-80.

[Ze względu na znaczne zniekształcenia liniowe, wynoszące na południku środkowym -70 cm/km oraz ponad +80 cm/km na skrajnych obszarach Polski, układ ten ma zastosowanie głównie do prac geodezyjno-kartograficznych o znaczeniu ogólnokrajowym (osnowy geodezyjne, mapy topograficzne w skalach 1: 10 000 lub mniejszych).]

**5.1.2. Układ „2000” jest złożony z 4 stref,** będących odwzorowaniami *Gaussa-Krügera* elipsoidy GRS-80 w pasach  $3^\circ$ , z południkami środkowymi (osiowymi):  $15^\circ$ ,  $18^\circ$ ,  $21^\circ$ ,  $24^\circ$  (zob. rys.1.3) oraz jednakową skalą na tych południkach  $m_o = 0.999923$ . W poszczególnych strefach oznaczonych odpowiednio: **2000/15**, **2000/18**, **2000/21**, **2000/24**, współrzędne pełne (cechowane) określa się analogicznie jak w dawnym układzie „1942” z podziałem na pasy  $3^\circ$ :

- współrzędna  $X_{2000}$  równa się skalowanej odciętej  $x_{GK}$  odwzorowania *Gaussa-Krügera*:

$$X_{2000} = m_o \cdot x_{GK} \quad (m_o = 0.999923)$$

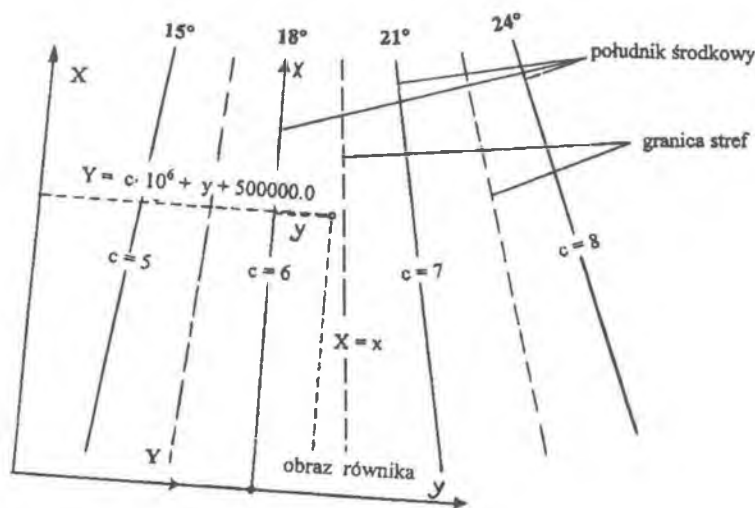
- współrzędną  $Y$  określa się wzorem (rys. 5.2):

$$Y_{2000} = c \cdot 1000000 + m_o \cdot y_{GK} + 500000 \text{ m (współrzędne cechowane)}$$

gdzie  $c$  oznacza jednocyfrową cechę strefy, określoną odpowiednio dla kolejnej strefy jako liczba naturalna 5, 6, 7 lub 8 lub wzorem:

$$c = L_o [^\circ] : 3 [^\circ] \text{ (cecha - indeks strefy)}$$

gdzie  $L_o [^\circ]$  - długość geodezyjna (w stopniach) południka środkowego strefy.



Rys. 5.2. Współrzędne pełne w strefach układu „2000”

**5.1.3. Układ „1942”**, zgodnie z ogólnymi informacjami podanymi już w p. 1.4.5., obejmował dwa niezależne podsystemy odwzorowawcze:

- Dla map topograficznych zastosowano odwzorowanie *Gaussa-Krügera* w pasach południkowych  $6^\circ$  (por. rys. 1.4). Przyjęto zatem 2 strefy odwzorowawcze z południkami środkowymi  $15^\circ$  i  $21^\circ$  oraz skalę na tych południkach  $m_0 = 1$  (bez zniekształcenia). Współrzędne pełne (cechowane) były określone według zasady:

$$X_{1942(6)} = x_{GK} (m_0 = 1)$$

$$Y_{1942(6)} = c \cdot 1\,000\,000 + y_{GK} + 500\,000$$

przy czym cecha  $c = 3$  jeśli  $L_0 = 15^\circ$  i  $c = 4$  jeśli  $L_0 = 21^\circ$ .

- Dla opracowań wielkoskalowych (1: 5000 i większych) zastosowano odwzorowanie *Gaussa-Krügera* w pasach  $3^\circ$  z południkami środkowymi  $15^\circ$ ,  $18^\circ$ ,  $21^\circ$  i  $24^\circ$  (4 strefy - układy odwzorowawcze: szczeciński, bydgoski, warszawski i białostocki). Podobnie jak w pasach  $6^\circ$  przyjęto odwzorowania południków środkowych bez zniekształceń ( $m_0 = 1$ ). Współrzędne pełne  $X_{1942(3)}$ ,  $Y_{1942(3)}$  są określane analogicznie jak współrzędne  $X_{1942(6)}$  i  $Y_{1942(6)}$ , z tym że cecha  $c$  wynosi odpowiednio 5, 6, 7 lub 8 dla stref z południkami osiowymi  $15^\circ$ ,  $18^\circ$ ,  $21^\circ$  i  $24^\circ$ .

**5.2. Odwzorowanie Gaussa-Krügera** opiera się na dwóch warunkach (zasadach):

- Zasada odwzorowania południka środkowego strefy, sprowadzająca się do dwóch założeń:

- prostoliniowości,
- izometryczności (południk środkowy odwzorowuje się bez zniekształceń).

Wprowadzając tzw. skalę kurczenia południka środkowego ( $m_0 < 1$ ), zwaną dalej

skalą na południku środkowym, mówimy w szczególności o modyfikowanym lub skalowanym odwzorowaniu *Gaussa-Krügera*, przy czym  $m_0$  pełni funkcję skali podobieństwa odwzorowania (współrzędne oryginalnego odwzorowania są mnożone przez  $m_0$ ).

- Warunek wiernokątności odwzorowania.

Odwzorowanie *Gaussa-Krügera* możemy zrealizować jako złożenie trzech następujących przekształceń:

1. Wiernokątne odwzorowanie (*Lagrange'a*) elipsoidy na sferę, czyli przekształcenie:

$$(B, L) \Rightarrow (\varphi, \lambda) \quad (\lambda = L)$$

(przekształcenie szerokości geodezyjnej  $B$  w szerokość sferyczną  $\varphi$ )

2. Wiernokątne odwzorowanie walcowe poprzeczne (*Mercatora*) wąskiego pasa południkowego sfery na płaszczyznę (walec styczny w południku  $\lambda_0$ , który jest również południkiem środkowym odwzorowania *Gaussa-Krügera*):

$$(\varphi, \lambda / \lambda_0) \Rightarrow (x, y) \text{ MERCATORA}$$

3. Wiernokątne przekształcenie płaszczyzny odwzorowania *Mercatora* w płaszczyznę *Gaussa-Krügera*, przy wykorzystaniu szeregów trygonometrycznych:

$$(x, y) \text{ MERCATORA} \Rightarrow (x, y) \text{ GK}$$

[Powyższe ujęcie formuł odwzorowawczych, pochodzące jeszcze od *Krügera*\*), było podstawą do sformułowania wzorów praktycznych układu „1992” \*\*). Jakkolwiek nie stanowi ono obligatoryjnego podejścia do realizacji odwzorowania *Gaussa-Krügera*, prowadzi do efektywnych formuł numerycznych, zwłaszcza dla szerokiej strefy odwzorowawczej, jaką mamy w przypadku jednostrefowego układu „1992”. Jako pewne podejście uniwersalne będzie ono podstawą rozwinięć w niniejszych wytycznych technicznych. Rozważymy odrębnie poszczególne etapy odwzorowania, sformułujemy odpowiadające przekształcenia odwrotne oraz określimy wzory na zniekształcenia i redukcje odwzorowawcze.]

**5.3. Odwzorowanie Lagrange'a** jest odwzorowaniem wiernokątnym całej powierzchni elipsoidy na całą sferę. Zachowuje ono niezmiennie długość geodezyjną  $L$ , równą odpowiedniej długości  $\lambda$  na sferze, natomiast szerokość geodezyjna  $B$  przekształca się w szerokość sferyczną  $\varphi$  ( $B \Rightarrow \varphi$ ) według zależności:

$$\operatorname{tg}(\varphi / 2 + \pi / 4) = \kappa(B) \cdot \operatorname{tg}(B / 2 + \pi / 4), \quad (5.1)$$

\*) Krüger L.: *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene*. Geod. Intitut Podstam, Neue Folge 51, 1912

\*\*) Balcerzak J.: *Odwzorowanie Gaussa-Krügera w szerokiej 12° strefie dla obszaru Polski*. Komorowo, 1994

( $\varphi$ ,  $B$  określone w mierze łukowej), przy czym wielkość pomocnicza

$$\kappa(B) = \{ [1 - e \cdot \sin(B)] / [1 + e \cdot \sin(B)] \}^{e/2} \quad (5.1a)$$

$e$  - pierwszy mimośród elipsoidy określony wzorem (4.2a).

Przekształcenie odwrotne ( $\varphi \Rightarrow B$ ), które będzie potrzebne do realizacji odwrotnego odwzorowania *Gaussa-Krügera*, nie da się wyrazić bezpośrednio jako rozwiązanie równania (5.1). Do tego celu posługujemy się aproksymacyjnym szeregiem trygonometrycznym lub potęgowym. Podamy więc dwa alternatywne rozwiązania.

Tabela 5.1

Przekształcenie ( $\varphi \Rightarrow B$ ) dla elipsoidy GRS-80	
Współczynniki wielomianu trygonometrycznego	Współczynniki wielomianu potęgowego (tylko dla szerokości $B$ od $48^\circ$ do $56^\circ$ )
	$\varphi_0 = 186530.000000000 [ \text{''} ]$
	$B_0 = 187202.223430037 [ \text{''} ]$
$c_2 = 0.3356551485597 \cdot 10^{-2}$	$d_1 = 16639.916738375$
$c_4 = 0.6571873148459 \cdot 10^{-5}$	$d_2 = -8.753300548$
$c_6 = 0.1764656426454 \cdot 10^{-7}$	$d_3 = 0.121479067$
$c_8 = 0.5400482187760 \cdot 10^{-10}$	$d_4 = 0.018832832$ wpływ
	$d_5 = -0.000184801$ wyrazów:
	-----
	$d_6 = -0.000015590$ $ e  < 10^{-6}$
	$d_7 = 0.000000247$
Przekształcenie ( $\varphi \Rightarrow B$ ) dla elipsoidy Krasowskiego	
	$\varphi_0 = 186530.000000000 [ \text{''} ]$
	$B_0 = 187202.127012068 [ \text{''} ]$
$c_2 = 0.3356069601754 \cdot 10^{-2}$	$d_1 = 16639.920634311$
$c_4 = 0.6569986331658 \cdot 10^{-5}$	$d_2 = -8.752048635$
$c_6 = 0.1763896519657 \cdot 10^{-7}$	$d_3 = 0.121460616$
$c_8 = 0.5397379816930 \cdot 10^{-10}$	$d_4 = 0.018830207$ wpływ
	$d_5 = -0.000184638$ wyrazów:
	-----
	$d_6 = -0.000015622$ $ e  < 10^{-6}$
	$d_7 = -0.000000147$

Aproksymacyjny szereg trygonometryczny ma postać:

$$B = \varphi + c_2 \cdot \sin(2 \cdot \varphi) + c_4 \cdot \sin(4 \cdot \varphi) + c_6 \cdot \sin(6 \cdot \varphi) + c_8 \cdot \sin(8 \cdot \varphi) + \dots \quad (5.2)$$

gdzie współczynniki  $c_2, c_4, c_6, c_8$  wyrażają się jako funkcje mimośrodu elipsoidy. Ich konkretne wartości dla elipsoidy GRS-80 podaje tabela 5.1. Wskazana dokładność rozwinięcia (do ósmego rzędu, przy znikaniu wyrazów o wskaźnikach nieparzystych) przewyższa typowe wymagania praktyczne. Błędy są mniejsze od  $10^{-7}$  ["]].

Alternatywny wielomian potęgowy (obcięty do stopnia 7) adekwatny w zakresie szerokości geodezyjnych  $B$  od  $48^\circ$  do  $56^\circ$ , wyrażający wynik w sekundach stopniowych, ma postać:

$$B = B_0 + d_1 \cdot t + d_2 \cdot t^2 + d_3 \cdot t^3 + d_4 \cdot t^4 + d_5 \cdot t^5 + d_6 \cdot t^6 + d_7 \cdot t^7 = \\ = B_0 + t \cdot (d_1 + t \cdot (d_2 + t \cdot (d_3 + t \cdot (d_4 + t \cdot (d_5 + t \cdot (d_6 + t \cdot d_7)))))) \quad (5.3)$$

przy czym

$$t = (\varphi'' - \varphi_0) \cdot 6.0 \cdot 10^{-5} \quad (5.3a)$$

jest przekształconym (scentrowanym i unormowanym) argumentem, zaś stałe  $B_0, \varphi_0$  oraz parametry  $d_1, d_2, \dots, d_7$  wielomianu są zestawione w prawej kolumnie tabeli 5.1.

**PRZYKŁAD 5.1. Przekształcenia  $B \Leftrightarrow \varphi$  w odwzorowaniu Lagrange'a elipsoidy GRS-80**

**Dane  $B$  i obliczone  $\varphi$  ( $B \Rightarrow \varphi$ ):**

Nr punktu	$B$	$B$ ["]	$\varphi$ ["]	$\varphi$ [rad]
1	$52^\circ 00' 00''$	187200.0000	186527.7729957871	0.9043121625525147
2	$53^\circ 00' 00''$	190800.0000	190133.9689502364	0.9217954939073032
3	$50^\circ 00' 00''$	180000.0000	179317.8493738965	0.8693574664360405

**Przekształcenie odwrotne ( $\varphi$  [rad]  $\Rightarrow B$  [rad]) szeregiem trygonometrycznym (5.2):**

	$B$ [rad]	$B$ ["]	
1	0.9075712110370141	187199.9999999923	
2	0.9250245035570149	190800.0000000042	
3	0.8726646259970171	179999.9999999696	( $ e  < 0.5 \cdot 10^{-7}$ )

**Przekształcenie odwrotne ( $\varphi$  ["]  $\Rightarrow B$  ["]) wielomianem potęgowym (5.3):**

	Wielomian stopnia 7	Wielomian stopnia 6	Wielomian stopnia 5
1	187199.9999999998	187199.9999999998	187199.9999999998
2	190799.9999999999	190799.9999999999	190800.0000000015
3	180000.0000000001	180000.0000000004	180000.0000001029
	$ e  < 10^{-9}$	$ e  < 10^{-9}$	$ e  < 10^{-6}$

**5.4. Wiernokątne odwzorowanie poprzeczne Mercatora**, stanowiące drugi etap odwzorowania *Gaussa-Krügera*, realizujemy za pomocą następujących wzorów:

$$\begin{aligned} x_{MERC} &= R_o \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi) \cdot \cos(\Delta\lambda)} \right) \\ y_{MERC} &= 0.5 \cdot R_o \cdot \ln \left( \frac{1 + \cos(\varphi) \cdot \sin(\Delta\lambda)}{1 - \cos(\varphi) \cdot \sin(\Delta\lambda)} \right) \end{aligned} \quad (5.4)$$

$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o = L - L_o$  (przyrost długości geodezyjnej względem  $\lambda_o = L_o$ ).

Wielkość  $R_o$  jest przyjętym promieniem sfery odwzorowania *Lagrange'a*. Dla ostatecznego celu, jakim jest odwzorowanie *Gaussa-Krügera* skala sfery, wyrażająca się poprzez promień  $R_o$ , jest obojętna. W szczególności możemy założyć sferę jednostkową o promieniu  $R_o = 1$ .

Odwrotne odwzorowanie poprzeczne *Mercatora* wynika z rozwiązania układu (5.4) względem  $\varphi$  i  $\Delta\lambda$ . Tą drogą otrzymujemy wzory:

$$\varphi = \operatorname{arc} \sin [ \cos (w) \cdot \sin (\alpha) ] \quad (5.5)$$

$$\Delta\lambda = \operatorname{arc} \operatorname{tg} [ \operatorname{tg} (w) / \cos (\alpha) ]$$

gdzie:

$$w = 2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} [ \exp (\beta) ] - \pi / 2 \quad (5.5a)$$

$$\alpha = x_{MERC} / R_o, \beta = y_{MERC} / R_o \quad (5.5b)$$

(współrzędne *Mercatora* dla sfery jednostkowej).



## PRZYKŁAD 5.2. Odwzorowanie poprzeczne Mercatora

Dane zgodne z przykładem 5.1 ( $\varphi$  z odwzorowania Lagrange'a elipsoidy GRS-80):

Nr punktu	$\varphi$ [ " ]	$\Delta\lambda$ [ " ] (założone przyrosty szerokości)
1	186527.772995787	-14400.000000000
2	190133.968950236	7200.000000000
3	179317.849373896	10800.000000000

Współrzędne Mercatora (wg wzorów 5.4 i 5.5b) :

	$\alpha, \beta$ (dla sfery jednostkowej)		x	y [m]
1	0.9054969563579436	-0.04315205584348473	5765705.821260	-274768.521119
2	0.9220888825876217	0.02109605964874843	5871354.067758	134328.086990
3	0.8700334467875437	0.03378615936460926	5539893.727540	215131.651585

Odwzorowanie odwrotne (wg wzorów 5.5):

	$\varphi$ [ " ]	$\Delta\lambda$ [ " ]	
1	186527.772995787	-14400.000000000	
2	190133.968950236	7200.000000000	
3	179317.849373896	10800.000000000	$ e  < 10^{-9}$ [ " ]

5.5. Ostatni etap, zgodnie z p. 5.2, będzie **przekształceniem płaszczyzny Mercatora w płaszczyznę odwzorowania Gaussa-Krügera**. Ponieważ jest to przekształcenie wiernokątne, więc można je wyrazić za pomocą funkcji zmiennej zespolonej. Funkcją tą może być zarówno wielomian trygonometryczny (sposób *Krügera*), jak też algebraiczny (potęgowy). Ograniczymy się do korzystniejszego numerycznie pierwszego wariantu (por. p. 5.2).

Niech  $\mathbf{z} = (\alpha, \beta)$  oznacza zespoloną współrzędną *Mercatora* dla sfery jednostkowej, zaś  $\mathbf{Z} = (x_{GK}, y_{GK})$  szukaną zespoloną współrzędną *Gaussa-Krügera*. Wówczas zespolony wielomian trygonometryczny, przekształcający  $\mathbf{z}$  na  $\mathbf{Z}$ , ma postać:

$$\mathbf{Z} = R_0 \cdot [\mathbf{z} + a_2 \cdot \sin(2 \cdot \mathbf{z}) + a_4 \cdot \sin(4 \cdot \mathbf{z}) + a_6 \cdot \sin(6 \cdot \mathbf{z}) + a_8 \cdot \sin(8 \cdot \mathbf{z}) + \dots] \quad (5.6)$$

gdzie  $R_0$  oznacza promień sfery o długości południka równej długości południka elipsoidy,  $a_k$  ( $k = 2, 4, 6, 8, \dots$ ) - współczynniki wielomianu będące liczbami rzeczywistymi. Wartości współczynników oraz promień  $R_0$  podano w tabeli 5.2 (dla układów „1992”, „2000” przyjmujemy dane parametry elipsoidy GRS-80). Jeśliby przyjąć, że  $\beta = 0$ , wtedy wielomian (5.6) przechodzi w postać rzeczywistą i wyraża długość łuku południka elipsoidy, bezpośrednio w funkcji  $a$ , a poprzez odwzorowanie *Mercatora* i *Lagrange'a* - odpowiednio w funkcji  $\varphi, B$ .

WSPÓŁCZYNNIKI WIELOMIANÓW TRYGNOMETRYCZNYCH	
elipsoida GRS-80	elipsoida <i>Krasowskiego</i>
$a_2$ 0.8377318247344 E-03	0.8376117571403 E-03
$a_4$ 0.7608527788826 E-06	0.7606346141534 E-06
$a_6$ 0.1197638019173 E-08	0.1197122824063 E-08
$a_8$ 0.2443376242510 E-11	0.2441972616146 E-11
-----	
$b_2$ -0.8377321681641 E-03	-0.8376121004223 E-03
$b_4$ -0.5905869626083 E-07	-0.5904168570212 E-07
$b_6$ -0.1673488904988 E-09	-0.1672768339465 E-09
$b_8$ -0.2167737805597 E-12	-0.2166492522990 E-12
-----	
<b>promień sfery o długości południka równej długości południka elipsoidy</b>	
$R_0$ 6367449.14577...	6367558.49687...
-----	
<b>Objaśnienia:</b>	
$a_2, a_4, a_6, a_8$ - współczynniki szeregu trygonometrycznego operacji:	$\varphi \Rightarrow s,$
$b_2, b_4, b_6, b_8$ - współczynniki szeregu trygonometrycznego operacji odwrotnej:	$s \Rightarrow \varphi,$
$s$ - długość łuku południka elipsoidy	

Jeśli wielomian zespolony może być realizowany przez dostępne narzędzia programowania (operacje na liczbach, zmiennych i funkcjach zespolonych), to formuła (5.6) w pełni wystarcza do praktycznej realizacji odwzorowania. Na ogół przedstawia się ją jednak w postaci dwóch wielomianów rzeczywistych, wynikających z (5.6), a mianowicie:

$$x_{GK} = R_0 \cdot \left[ \alpha + \sum_{k=2/2/8} a_k \cdot \sin(k \cdot \alpha) \cdot \cosh(k \cdot \beta) + \dots \right] \quad (5.7)$$

$$y_{GK} = R_0 \cdot \left[ \beta + \sum_{k=2/2/8} a_k \cdot \cos(k \cdot \alpha) \cdot \sinh(k \cdot \beta) + \dots \right]$$

( $\cosh(x) = [\exp(x) + \exp(-x)]/2$  oraz  $\sinh(x) = [\exp(x) - \exp(-x)]/2$  stanowią definicje odpowiednich funkcji hiperbolicznych).

Wprowadzając następnie założoną skalę kurczenia południka środkowego  $m_0$  (inaczej: skalę na południku środkowym odwzorowania *Gaussa-Krügera*, a

funkcjonalnie jako skalę podobieństwa, przez którą należy wymnożyć wszystkie współrzędne  $x_{GK}$ ,  $y_{GK}$ ) oraz umowne składowe  $x_0$ ,  $y_0$  przesunięcia układu współrzędnych, przechodzimy już do konkretnej aplikacji odwzorowania *Gaussa-Krügera* (por. w szczególności p. 5.1).

**5.6. Odwzorowanie odwrotne do (5.6), (5.7),** czyli przekształcenie zespolonej zespolonej  $Z$  na współrzędną  $z$  (stosownie do oznaczeń przyjętych we wzorze (5.6)) wyraża następujący (odwrócony) wielomian zmiennej zespolonej:

$$z = W + b_2 \cdot \sin(2 \cdot W) + b_4 \cdot \sin(4 \cdot W) + b_6 \cdot \sin(6 \cdot W) + b_8 \cdot \sin(8 \cdot W) + \dots \quad (5.8)$$

gdzie:

$$W = (u, v), \quad u = x_{GK} / R_0, \quad v = y_{GK} / R_0 \quad (5.8a)$$

- unormowane współrzędne *Gaussa-Krügera*  $b_k$  ( $k=2,4,6,8, \dots$ ) - współczynniki wielomianu jako liczby rzeczywiste podane w tabeli 5.2.

Podobnie jak w przypadku wzorów (5.6) formuła zespolona (5.8) rozkłada się na dwie formuły rzeczywiste:

$$\alpha = u + \sum_{k=2/2/8} b_k \cdot \sin(k \cdot u) \cdot \cosh(k \cdot v) + \dots \quad (5.9)$$

$$\beta = v + \sum_{k=2/2/8} b_k \cdot \cos(k \cdot u) \cdot \sinh(k \cdot v) + \dots$$

Wobec zależności (5.5) otrzymane współrzędne *Mercatora*  $\alpha$ ,  $\beta$  (dla sfery jednostkowej) przeliczamy na współrzędne  $(\varphi, \Delta\lambda)$  odwzorowania *Lagrange'a* (zob. p. 5.3), te z kolei na współrzędne geodezyjne  $B$ ,  $L$ , zgodnie z formułami opisanymi w p. 5.2.

[Wzory można znaleźć np. w cytowanym już dziele *L. Krügera*; ich aplikacje do nowych krajowych układów współrzędnych „1992”, „2000” są zasługą prac *dr. J. Balcerzaka i prof. J. Panasiuka* z Politechniki Warszawskiej. W literaturze krajowej należy odnotować również w tym zakresie prace *dr. M. Plewako* z Akademii Rolniczej w Krakowie, dotyczące m.in. rekurencyjnego wyznaczania współczynników wielomianów trygonometrycznych (zob. wykaz literatury).]

**PRZYKŁAD 5.3. Przekształcenie odwzorowania Mercatora w odwzorowanie Gaussa-Krügera i do układu „1992” oraz przekształcenie odwrotne**

**Dane zgodne z przykładem 5.2:**

Współrzędne odwzorowania Mercatora:

Nr punktu	$\alpha$ [z odwzorowania sfery jednostkowej]	$\beta$	$x_{MERC} = \alpha \cdot R_0$ [z odwzorowania sfery o promieniu $R_0$ ]	$y_{MERC} = \beta \cdot R_0$
1	0.9054969563579	-0.04315205584348	5765705.821260	-274768.521119
2	0.9220888825876	0.02109605964875	5871354.067758	134328.086990
3	0.8700334467875	0.03378615936461	5539893.727540	215131.651585

Parametry odwzorowania Gaussa-Krügera i układu „1992”:

$X_0 = -5300000.0000$ ,  $Y_0 = 5000000.0000$ ,  $m_0 = 0.9993$

$R_0 = 6367449.14577105$  - promień sfery Lagrange'a.

**Współrzędne wynikowe według przekształcenia (5.7) i parametrów układu „1992” :**

Nr punktu	$u = x_{GK} / R_0$ [na sferze jednostkowej]	$v = y_{GK} / R_0$	$X = m_0 \cdot x_{GK} + X_0$ [w układzie „1992”]	$Y = m_0 \cdot y_{GK} + Y_0$
1	0.9063133121324	-0.0431347179430	466864.2923909	225534.1377667
2	0.9228958241978	0.0210864590802	572378.6828645	634172.9689885
3	0.8708608355423	0.0337765186528	241280.4699011	714919.7156575

**Przekształcenie odwrotne według wzorów (5.9):**

Nr punktu	$\alpha$	$\beta$	$x_{MERC} = \alpha \cdot R_0$	$y_{MERC} = \beta \cdot R_0$
1	0.9054969563580	-0.0431520558435	5765705.821260	-274768.521119
2	0.9220888825876	0.0210960596488	5871354.067758	134328.086990
3	0.8700334467876	0.0337861593646	5539893.727540	215131.651585

**Uwagi:** Zgodność wyników wykazuje, że błąd numeryczny nie przekracza połowy jednostki na ostatniej zapisanej pozycji cyfry. Dokładność ta istotnie przewyższa realne wymagania praktyczne. W konkretnych aplikacjach zaokrąglenia końcowe będą w szczególności zależeć od konkretnej organizacji algorytmu obliczeniowego, zaokrąglenia rezultatów pośrednich i precyzji zapisu liczb. Praktycznie, w zupełności wystarczające jest utrzymanie się na poziomie 11-12 cyfr dokładnych.

## 5.7. Podstawowe elementy definiujące pole zniekształceń odwzorowawczych to:

### • Elementarna skala liniowa

$$m = ds_o / ds_e, \quad (5.10)$$

czyli stosunek różniczkowego przyrostu długości na płaszczyźnie odwzorowawczej do odpowiadającego przyrostu długości łuku na elipsoidzie (lub na umownej powierzchni odniesienia). Dla wszystkich odwzorowań wiernokątnych parametr ten jest dla danego punktu wielkością stałą (niezależną od kierunku). Alternatywnym parametrem jest **elementarne zniekształcenie liniowe**

$$\sigma = m - 1 \quad (5.11)$$

(wyrażając je np. w cm/km, należy przemnożyć przez  $10^{-5}$ ). Jeśli w ogólności odwzorowanie wiernokątne (pewnej przestrzeni dwuwymiarowej w inną przestrzeń dwuwymiarową) zapiszemy w formie funkcji analitycznej zmiennej zespolonej:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{f}(\mathbf{z}), \quad (5.12)$$

gdzie  $\mathbf{Z} = (X, Y)$  (współrzędne wyznaczone),  $\mathbf{z} = (x, y)$  (współrzędne dane), to elementarna skala liniowa przekształcenia jest określona jako wartość bezwzględna (moduł) z gradientu tej funkcji:

$$\mathbf{grad} [\mathbf{f}(\mathbf{z})] = d\mathbf{f}(\mathbf{z})/d\mathbf{z} = [f_X(\mathbf{z}), f_Y(\mathbf{z})] \quad (5.13)$$

(rozłożony na część rzeczywistą i urojoną),

$$m = \text{mod} [d\mathbf{Z} / d\mathbf{z}] = [f_X^2(\mathbf{z}) + f_Y^2(\mathbf{z})]^{1/2} \quad (5.14)$$

• **Konwergencja, czyli inaczej zbieżność południków lub zbieżność osi odciętych pary wzajemnie odwzorowywanych układów współrzędnych  $\gamma$**  (rys. 5.3) oznacza ujemną wartość kąta kierunkowego południka (lub osi odciętych umownego układu pierwotnego) w układzie płaszczyzny odwzorowawczej (wtórnym). Można też powiedzieć, że jest to kąt pomiędzy odwzorowaną osią układu pierwotnego a osią układu wtórnego mierzony zgodnie ze wskazówkami zegara. Podobnie jak elementarna skala liniowa konwergencja jest parametrem charakterystycznym dla każdego punktu płaszczyzny odwzorowawczej (charakteryzuje lokalne „skręcenie” pola zniekształceń). Jeśli odwzorowanie (wiernokątne) jest zapisane w formie (5.12), to konwergencja jest ujemnym argumentem gradientu,

$$\gamma = -\arg (d\mathbf{Z} / d\mathbf{z}) = -\text{arc tg} [f_Y(\mathbf{z}) / f_X(\mathbf{z})] \quad (5.15)$$

### Prosty przykład odwzorowania wiernokątnego:

Liniową transformację przez podobieństwo (transformację *Helmerta*) definiuje funkcja zmiennej zespolonej:

$$Z = f(z) = a + b \cdot z$$

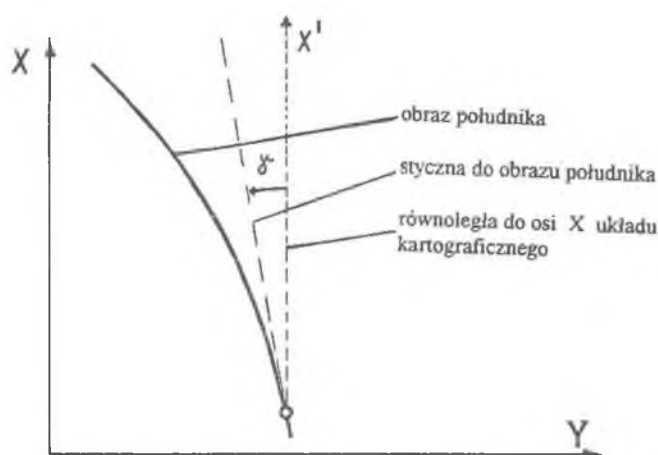
gdzie:  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2)$  - stałe liczby zespolone,  $z = (x, y)$  - współrzędne dane,  $Z = (X, Y)$  - współrzędne wynikowe. Stosując formuły (5.13), (5.14), (5.15), otrzymujemy:

$df(z)/dz = b = (b_1, b_2)$  ( $f_x = b_1$ ,  $f_y = b_2$  - w tym przypadku wielkości stałe) oraz:

$$m = (b_1^2 + b_2^2)^{1/2} \quad \gamma = -\arctg(b_2/b_1).$$

Oznaczając  $b_1 = k \cdot \cos(\alpha)$ ,  $b_2 = -k \cdot \sin(\alpha)$ , dostaniemy:  $m = k$ ,  $\gamma = \alpha$ .

( $\alpha$  jest równocześnie kątem obrotu układu wtórnego względem układu pierwotnego)



Rys. 5.3. Ilustracja zbieżności południków

**5.8. Analityczne wzory na obliczenie składowych pola zniekształceń odwzorowawczych:** Odwzorowanie *Gaussa-Krügera* zostało zdefiniowane jako złożenie 3 odwzorowań konforemnych, przy czym w konkretnych jego aplikacjach (układy: „1992”, „2000”) dochodzi jeszcze dodatkowo zmiana skali i translacja (które są także przekształceniami konforemnymi). W związku z powyższym finalna skala elementarna długości może być wyrażona jako iloczyn skal składowych:

$$m = m_0 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \quad (5.16)$$

gdzie  $m_0$  jest przyjętą skalą kurczenia południka środkowego (skalą podobieństwa odwzorowania) wynoszącą przykładowo 0.9993 dla układu „1992” lub 0.999923 dla układów strefowych „2000/15”, „2000/18”, „2000/21”, „2000/24”;  $m_1$  oznacza elementarną skalę długości dla odwzorowania *Lagrange’a* (całej elipsoidy na całą sferę),  $m_2$  - elementarną skalę długości odwzorowania poprzecznego *Mercatora* względem odwzorowania *Lagrange’a*,  $m_3$  - elementarną skalę długości odwzorowania *Gaussa-Krügera* względem odwzorowania poprzecznego *Mercatora*.

W analogicznym układzie porządkowym zbieżność południków podlega sumie algebraicznej:

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 \quad (\gamma_0 = 0, \gamma_1 = 0) \quad (5.17)$$

(jednorodna zmiana skali i odwzorowanie *Lagrange'a* zachowują kierunki południków), przy czym  $\gamma_2, \gamma_3$  oznaczają przyrosty konwergencji odpowiednich odwzorowań składowych.

Poszczególne skale elementarne we wzorze (5.16) wyrażają się finalnie wzorami:

$$m_1 = \frac{\cos(\varphi) \cdot R_0}{\cos(B) \cdot R_N} \quad (5.18)$$

$$m_2 = \frac{1}{[1 - \cos^2(\varphi) \cdot \sin^2(\Delta\lambda)]^{1/2}} \quad (5.19)$$

oraz

$$m_3 = [C_X^2 + C_Y^2]^{1/2} \quad (5.20)$$

przy czym na podstawie wzorów (5.13) i (5.14):

$$C_X = 1 + \sum_{k=2/2/8} k \cdot a_k \cdot \cos(k \cdot \alpha) \cdot \cosh(k \cdot \beta) + \dots \quad (5.21)$$

$$C_Y = - \sum_{k=2/2/8} k \cdot a_k \cdot \sin(k \cdot \alpha) \cdot \sinh(k \cdot \beta) + \dots$$

[Porównując ostatnie wzory z wzorami (5.7), zauważamy, że skala elementarna może być wyznaczana z wyrażeń i funkcji używanych w przeliczaniu współrzędnych. Analogiczne wyrażenia i funkcje będą występować również we wzorach na zbieżność południków. Własności powyższe możemy spożytkować przy zapisywaniu algorytmów obliczeniowych w języku programowania komputera.]

Stosując przyjęte oznaczenia, wyrazimy również wzory na odpowiednie składniki konwergencji:

$$\gamma_2 = \text{arc tg} [ \sin(\varphi) \cdot \text{tg}(\Delta\lambda) ] \quad (5.22)$$

(dla odwzorowania poprzecznego *Mercatora*)

$$\gamma_3 = - \text{arc tg} [ C_Y / C_X ] \quad (5.23)$$

(dla odwzorowania *Gaussa-Krügera* względem odwzorowania *Mercatora*), gdzie  $C_X, C_Y$  są określone wzorami (5.21)

**PRZYKŁAD 5.4. Obliczenie składowych pola zniekształceń odwzorowawczych w układzie „1992” według wzorów (5.16) ÷ (5.23)**

**Dane wejściowe analogiczne jak w przykładach 5.1 - 5.3**

Odwzorowanie „1992”. Skala na południku środkowym  $L_0 = 19^\circ$ ;  $m_0 = 0.9993$

**Elementarne skale długości i zniekształcenia długości:**

Nr punktu	$m_0$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$\sigma = (m-1) \cdot 10^5$ [cm/km]
1	0.9993	1.0003975852	1.0009311944	0.9995972065	22.517
2	0.9993	1.0004542123	1.0002225301	0.9995446395	-47.898
3	0.9993	1.0002829712	1.0005708066	0.9997142140	-13.249

**Zbieżności południków (konwergencje):**

Nr punktu	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$\gamma_2$	$\gamma_3$	$\gamma$ [°]
1	0	0	- 3.49550324	- 0.00894029	- 3.5044435
2	0	0	+1.77068063	+0.00432793	+1.7750086
3	0	0	+2.54735070	+0.00710311	+2.5544538

**5.9. Aproksymacyjne wzory na obliczenie składowych pola zniekształceń odwzorowawczych** opierają się na przybliżeniu wzorów podstawowych wielomianami.

Zniekształcenie elementarne  $\sigma$  (przeliczenie na skalę  $m$  według zależności (5.11)) w konkretnych aplikacjach odwzorowania *Gaussa-Krügera* elipsoidy GRS-80 możemy wyrazić dostatecznie dokładnie następującym wielomianem ( $u, v$  - zmienne pomocnicze):

$$\sigma = \sigma_0 + m_0 \cdot v^2 \cdot [q_1 + q_2 \cdot u + q_3 \cdot u^2 + q_4 \cdot v^2] \quad (5.24)$$

gdzie (stałe współczynniki):

$$\begin{aligned} q_1 &= 306.752873 \\ q_2 &= -0.312616 \\ q_3 &= 0.006382 \\ q_4 &= 0.158591 \end{aligned} \quad (5.24a)$$

oraz

$\sigma_0$  - zniekształcenie na południku środkowym odwzorowania w cm/km (np. dla układu „1992”  $\sigma_0 = -70$  cm/km, zaś dla układów strefowych „2000”:  $\sigma_0 = -7.7$  cm/km,  $m_0 = 0.999923$ ),

unormowane argumenty:



$$u = (x_{GK} - 5800000.0) \cdot 2.0 \cdot 10^{-6} \quad (5.24b)$$

$$v = y_{GK} \cdot 2.0 \cdot 10^{-6}$$

$x_{GK}$ ,  $y_{GK}$  - nie modyfikowane współrzędne *Gaussa-Krügera* (jeśli  $y_{GK} = 0$ , to punkt leży na południku środkowym i  $x_{GK}$  jest długością łuku południka elipsoidy od równika do danego punktu; jeśli  $x_{(.)}$ ,  $y_{(.)}$  są współrzędnymi „przeskalowanymi”  $m_0$ , to należy obliczyć:  $x_{GK} = x_{(.)} / m_0$ ,  $y_{GK} = y_{(.)} / m_0$ )

### PRZYKŁAD 5.5. Obliczenie zniekształceń elementarnych według wzoru aproksymacyjnego (5.24), dla układu „1992”

Dane wejściowe identyczne jak w przykładach (5.1) i (5.4):

Nr punktu	Składniki wzoru (5.24)				suma
	$\sigma_0 + m_0 \cdot v^2 \cdot [q_1$	$+ q_2 \cdot u$	$+ q_3 \cdot u^2$	$+ q_4 \cdot v^2]$	$= \sigma$ [cm/km]
1	22.4974	0.0055	0	0.0144	22.5173
2	-47.8954	- 0.0034	0	0.0008	-47.8980
3	-13.2840	+ 0.0294	0.0003	0.0054	-13.2489

#### Uwagi:

- $\sigma_0 = - 70.0$  [cm/km].
- Ostateczne wartości są zgodne z wynikami w przykładzie 5.4 z dokładnością do 0.0005 cm/km.
- Trzeci wyraz wzoru (5.24) można praktycznie pominąć.
- Wpływ współrzędnej X zaznacza się jedynie w wyrazie ze współczynnikiem  $a_2$ .

**Aproksymantą konwergencji** dla tych samych unormowanych argumentów  $u, v$  może być wielomian algebraiczny

$$\gamma = - \sum_i \sum_j q_{ij} \cdot u^i \cdot v^j \quad (\text{obliczona wartość w } [^{\circ}\text{C}]) \quad (5.25)$$

gdzie współczynniki  $q_{ij}$  są określone w lewej kolumnie tabeli 5.3.

W prawej kolumnie tabeli 5.3 podano współczynniki wielomianu określającego tylko wartość  $\gamma_3$  z wzoru (5.25), czyli wielkość zmiany (przyrost) konwergencji w odwzorowaniu *Gaussa-Krügera* względem konwergencji w odwzorowaniu *Mercatora*.

[Istotną wartość całkowitej konwergencji  $\gamma$ , sięgającej w obszarze Polski do wartości kilku gradów, zawiera składnik  $\gamma_2$ , stanowiący kowergencję w odwzorowaniu *Mercatora*, natomiast składnik  $\gamma_3$  („wyrównujący” w pewnym sensie różnicę pomiędzy sferą a elipsoidą) - jak wynika to z tabeli 5.3, stanowi już setne części grada. Wielomian dla wyznaczenia  $\gamma_3$  jest już

niższego stopnia i jest bardziej stabilny numerycznie. Przy stosowaniu takiej alternatywy składnik  $\gamma_2$ , będzie wyznaczany oddzielnie z wzoru dokładnego (5.22).]

Tabela 5.3

WSPÓŁCZYNNIKI WIELOMIANÓW DLA WYZNACZENIA KONWERGENCJI W ODWZOROWANIU GAUSSA-KRÜGERA ELIPSOIDY GRS-80			
Wielomian określający $\gamma = \gamma_2 + \gamma_3$		Wielomian określający tylko $\gamma_3$ (przyrost do konwergencji <i>Mercatora</i> )	
Nazwa	Wartość	Nazwa	Wartość
$q_{01}$	- 64504.24842	$q_{01}$	-162.17521
$q_{11}$	-10441.46422	$q_{11}$	6.58485 Wpływ dalszych
$q_{21}$	-1055.97391	$q_{21}$	1.99660 wyrazów:
$q_{03}$	351.99361 Wpływ	$q_{03}$	-0.66553
$q_{31}$	-128.47450 dalszych	$q_{31}$	-0.02770 ] < 0.002 [ °C ]
$q_{13}$	128.46755 wyrazów:	$q_{13}$	0.02770 ]
$q_{41}$	-15.15744 ] < 1 [ °C ]		
$q_{23}$	30.33108 ]		
$q_{05}$	-3.03646 ]		
$q_{51}$	-1.76737 < 0.2 [ °C ]		
$q_{33}$	6.04719		Błąd numeryczny konwergencji
$q_{15}$	-1.85831 ]		w obszarze Polski $ e  < 0.001 [ °C ]$
$q_{61}$	-0.20424 ]		
$q_{43}$	1.02464 < 0.01 [ °C ]		
$q_{25}$	-0.59364 ]		
Błąd numeryczny konwergencji w obszarze Polski $ e  < 0.001 [ °C ]$			

**PRZYKŁAD 5.6. Obliczenie zbieżności południków (konwergencji) według wzoru aproksymacyjnego (5.25) w układzie „1992”**

Dane wejściowe identyczne jak w przykładach (5.1) ÷ (5.5)

Współczynniki wielomianów dane w tabeli (5.2).

Nr punktu	$\gamma_2 + \gamma_3$ [ cc ]	$\gamma_3$ (dla obliczeń alternatywnych) [ cc ]
1	35044.43598	89.40283
2	- 17750.08600	- 43.27931
3	- 25544.53902	- 71.03108

Porównanie wyników z przykładem 5.4 wskazuje, że nie ma praktycznych różnic pomiędzy formułami analitycznymi a aproksymacyjnymi (wykorzystującymi wielomiany potęgowe).

**5.10. Empiryczne wzory na wyznaczenie składowych pola zniekształceń odwzorowawczych (podane formuły mogą mieć zastosowanie w dowolnym odwzorowaniu wiernokątym)**

Empiryczne wyznaczenie składowych pola zniekształceń odwzorowawczych (skala lub zniekształcenie elementarne oraz zbieżność południków) opierają się na wykorzystaniu podstawowych (punktowych) praw odwzorowania pod warunkiem zachowania zwiększonej precyzji numerycznej obliczeń. Algorytm sprowadza się do numerycznej realizacji definicji tych parametrów, poprzez zastąpienie nieskończone małych różniczek odpowiednimi przyrostami skończonymi. Niech  $(B, L)$  będzie pewnym punktem na powierzchni elipsoidy, zaś  $(X, Y)$  odpowiednim obrazem na płaszczyźnie odwzorowawczej (zakładamy, że przejście pomiędzy obrazem a punktem powierzchni elipsoidy może być realizowane w dowolnym kierunku przy wykorzystaniu dostępnych praw odwzorowania (ze względu na sposób obliczeń wymagana jest precyzja wyższa od dokładności praktycznych wynikających z pomiaru). Dobierając pewien mały krok  $\Delta B$  (dla typowych odwzorowań może to być  $\Delta B = 0.5''$ , co odpowiada kilkunastometrowej długości łuku), określamy drugi (bliski) punkt, położony na tym samym południku,  $(B + \Delta B, L)$  oraz wyznaczamy odpowiednie jego współrzędne w odwzorowaniu, które oznaczymy jako  $(X + \Delta X, Y + \Delta Y)$ .

Przybliżoną skalę elementarną długości określamy z wzoru definicyjnego:

$$m = \Delta s_o / \Delta s_e \tag{5.26}$$

gdzie:

$$\Delta s_o = (\Delta X^2 + \Delta Y^2)^{1/2}, \quad \Delta s_e = \Delta B \cdot R_M / \rho''$$

$$R_M = a \cdot (1 - e^2) / [1 - e^2 \cdot \sin^2(B_s)]^{3/2} - \text{promień krzywizny przekroju południkowego elipsoidy dla szerokości średniej } B_s = B + \Delta B / 2$$

$$\rho'' = 206264.8062470964$$

**Uwaga:** Chcąc określić zniekształcenie elementarne z dokładnością do 1 mm/km, należy współrzędne obliczać z błędem numerycznym  $< 0.000001m$ . W tym celu wystarczy, by wszelkie zmienne i funkcje miały długość co najmniej 8 bajtów.

Przybliżoną wartość zbieżności południków możemy obliczyć, stosując formułę

$$\operatorname{tg}(\gamma) = -\Delta Y / \Delta X \text{ lub } \sin(\gamma) = -\Delta Y / \Delta s_o \quad (5.27)$$

Uwagi dotyczące precyzji wyznaczenia DX, DY przenoszą się tu odpowiednio.

**PRZYKŁAD 5.7. Empiryczne wyznaczenie składowych pola zniekształceń według wzorów (5.26) i (5.27). Obliczenia w układzie „1992”**

**Dane wejściowe identyczne jak w przykładach (5.1) ÷ (5.6)**

We wzorach (5.26) przyjęto krok  $\Delta B = 0.5''$

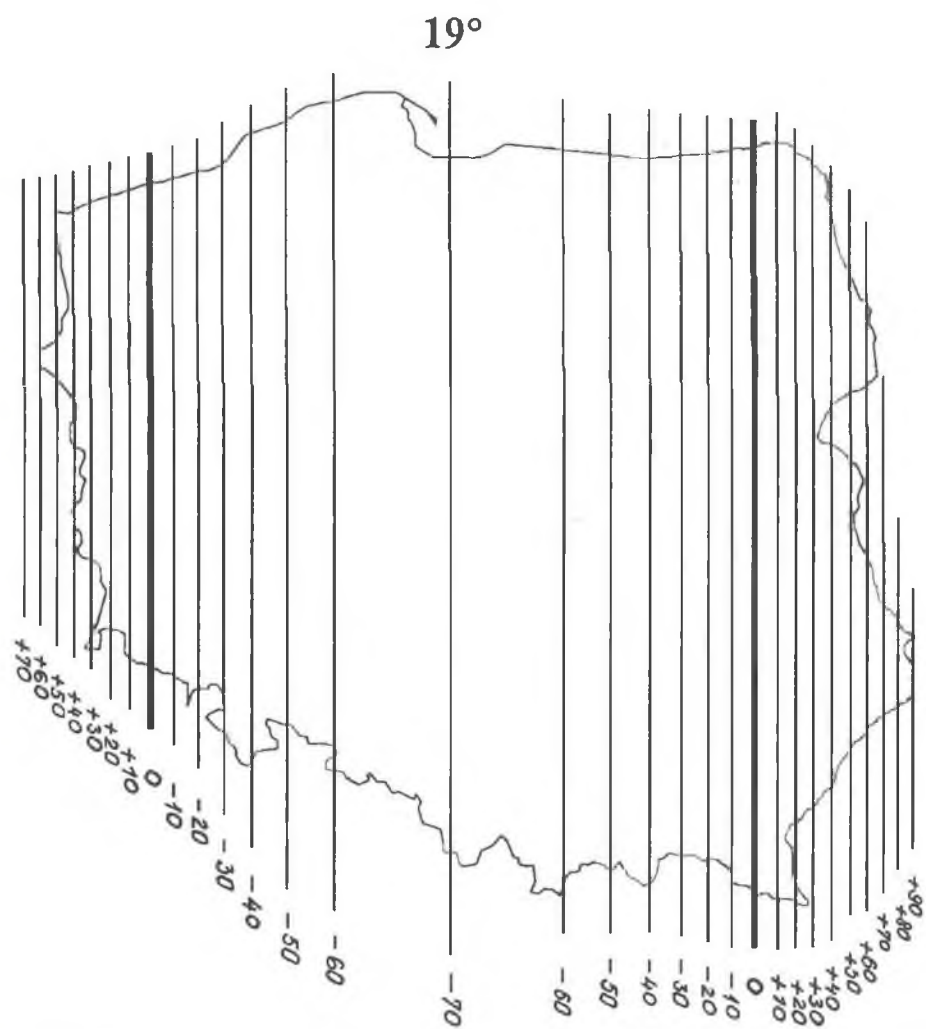
Nr

punktu	B	L	$\Delta X$	$\Delta Y$	$m$	$\sigma$ [cm/km]	$\gamma$ [°]
1	52° 15'	15.4338651759	0.8504583305	1.0002251820	22.51820	-3.50444684	
2	53° 21'	15.4430185967	-0.4306906873	0.9995210310	-47.89690	+1.77501019	
3	50° 22'	15.4340015049	-0.6196266331	0.9998675221	-13.24779	+2.55445641	

**Uwagi:**

Porównując wyniki z przykładami (5.4) i (5.5), widzimy, że metoda empiryczna nie wykazuje istotnego spadku dokładności numerycznej (obliczenia były wykonywane w precyzji 8-bajtowej). Błąd zniekształcenia liniowego  $\sigma$  ma co najwyżej poziom 0.02 mm/km, natomiast błąd określenia konwergencji ma poziom setnych części decymiligrada. Dokładność ta wystarcza dla typowych zastosowań praktycznych.

[ Rysunek 5.4 przedstawia izolinie elementarnych zniekształceń długości w układzie „1992”. Izolinie te mają przebieg w przybliżeniu równoległy do południka środkowego (słuszność takiej interpretacji wynika z analizy wpływu składników we wzorze (5.24)). Wzdłuż południka środkowego zniekształcenie elementarne wynosi dokładnie  $-70\text{cm/km}$ , a wynika to z przyjętej w tym południku skali (skali kurczenia)  $m_o = 0.9993$ . W miarę oddalania się od południka środkowego przyrost zniekształcenia powiększa się w przybliżeniu proporcjonalnie do kwadratu odległości, osiągając ekstremalnie w obszarze Polski wartość ok.  $91\text{ cm/km}$ . W przypadku układów strefowych 2000/15, 2000/18, 2000/21, 2000/24 (odwzorowanie Gaussa-Krügera w pasach 3°) ogólna charakterystyka zniekształceń w sensie ich przyrostów od południka środkowego każdej strefy jest analogiczna, lecz zaczyna się od zniekształcenia  $\sigma_o = -7.7\text{ cm/km}$  w południku środkowym ( $m_o = 0.999923$ ), zmniejsza się bezwzględnie do zera i osiąga maksymalne wartości dodatnie na granicy stref wynoszące (w okolicy równoleżnika 49°)  $\sigma_{max} \approx +7\text{ cm/km}$ .]



Rys. 5.4. Rozkład elementarnych zniekształceń długości w układzie „1992”  
(izolinie w odstępach co 10 cm/km)

## TEST KONTROLNY REALIZACJI ODWZOROWANIA GAUSSA-KRÜGERA W UKŁADZIE „1992” DLA WYBRANYCH PUNKTÓW

### Dane współrzędne geodezyjne na elipsoidzie GRS-80:

Nr	B	L
1	50° 37' 30"	21° 05' 05"
2	53° 00' 20"	17° 00' 10"
3	51° 00' 00"	15° 00' 00"
4	54° 00' 00"	23° 00' 00"
5	52° 00' 00"	19° 00' 00" (punkt na południku środkowym)

### Pośrednio obliczone współrzędne geograficzne wiernokątnego odwzorowania elipsoidy na sferę (Lagrange'a) w sekundach stopniowych:

Nr	$\varphi$ [ " ]	$l = L - L_0$ [ " ]	( $L_0 = 19^\circ$ )
1	181570.5948554411	7505.0000000000	
2	190154.0056512349	-7190.0000000000	Promień sfery <i>Lagrange'a</i>
3	182922.3976950233	-14400.0000000000	$R_0 = 6367449.14577105$
4	193740.9782246227	14400.0000000000	(por. tab. 1.1)
5	186527.7729957871	0.0000000000	

### Pośrednio obliczone współrzędne Mercatora (odwzorowanie walcowe-poprzeczne sfery *Lagrange'a* z południkiem środkowym $L_0 = 19^\circ$ )

	x	y
1	5607202.24994170	147560.03896807
2	5871967.31832658	-134124.35838001
3	5654466.55841326	-280840.16759765
4	5988232.51845281	262372.20811029
5	5758161.70695538	0.00000000

### Współrzędne „1992” oraz składowe pola deformacji

	X	Y	$\sigma$ [cm/km]	$\gamma$ [g]
1	308515.15716329	647409.55442290	-43.307	+1.7908896
2	572991.21118417	366030.56588372	-47.965	- 1.7726720
3	355745.36592856	219453.16841452	+26.685	- 3.4562226
4	689131.39152274	762053.69784336	+14.300	+3.5976635
5	459309.20940176	500000.00000000	-70.000	0.0000000

( $\sigma$  [cm/km] - elementarne zniekształcenie długości,  $\gamma$  [g] - zbieżność południków)

### Kontrolna transformacja odwrotna:

Nr	B	L	
1	50 37 29.99999998	21 05 05.00000000	Błąd numeryczny nie przekracza wartości $0.5 \cdot 10^{-7}$ [ " ]
2	53 00 20.00000001	17 00 10.00000000	
3	50 59 59.99999998	15 00 00.00000000	
4	54 00 00.00000002	23 00 00.00000000	
5	52 00 00.00000000	19 00 00.00000000	

## 5. 11. Redukcje odwzorowawcze długości, kierunków i azymutów linii geodezyjnych - metoda empiryczna i interpolacyjna

Podamy dwie metody (empiryczną i interpolacyjną) redukowania obserwacji geodezyjnych z powierzchni elipsoidy na płaszczyznę odwzorowania. Metody te mogą być zastosowane dla dowolnego odwzorowania.

### a) Metoda empiryczna

Wymaga dostępu do procedury obliczania długości i azymutu początkowego linii geodezyjnej, gdy dane są współrzędne geodezyjne końców linii (rozwiązanie zadania odwrotnego do podstawowego zadania geodezji wyższej - przykładowy algorytm *Gaussa*, dla szerokości „średniej” podano w załączniku 2 do niniejszych Wytycznych Technicznych). Zaczniemy od redukcji długości.

Niech  $(B_1^o, L_1^o, B_2^o, L_2^o)$  oznaczają współrzędne przybliżone pary punktów. Formalnie, wobec „dostępu” do funkcji odwzorowawczych możemy założyć, jako wyjściowe, współrzędne w układzie odwzorowawczym  $(X_1^o, Y_1^o, X_2^o, Y_2^o)$ . W każdym przypadku możemy dysponować więc współrzędnymi geodezyjnymi i płaskimi. Błąd przybliżenia współrzędnych nie powinien przekraczać wartości, przy których zmieniają się istotnie składowe pola zniekształceń odwzorowawczych. W praktyce oznacza to dokładność, jaką staramy się pozyskać dla współrzędnych początkowych do procesu obliczeniowo-wyrównawczego sieci geodezyjnej. Oznaczmy przez  $s_o, A_o$  odpowiednio: długość i azymut początkowy linii geodezyjnej na elipsoidzie, obliczone na podstawie danych współrzędnych geodezyjnych pary punktów, zaś przez  $D_o, T_o$  odpowiadającą długość (cięciwę) oraz kąt kierunkowy na płaszczyźnie odwzorowawczej, obliczone ze współrzędnych kartezjańskich. Pomierzona i zredukowana na elipsoidę długość niech nazywa się  $s$ , zaś szukana długość zredukowana na płaszczyźnie  $D$ . Wielkość redukcji

$$\Delta s = D - s \quad (5.28)$$

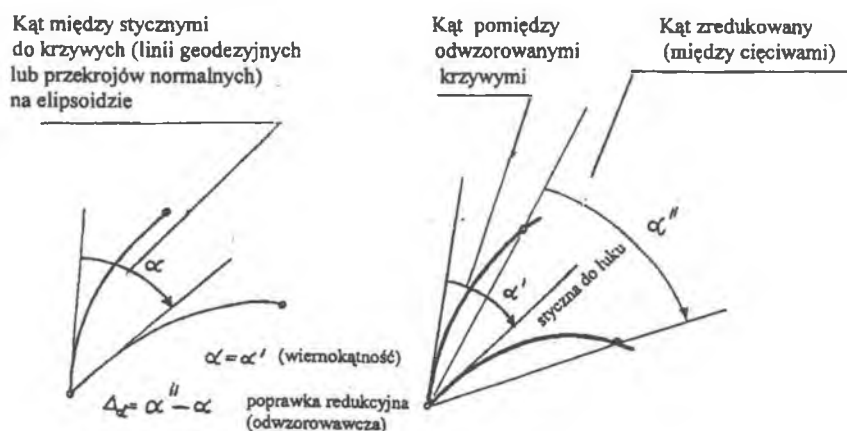
jaką należy dodać do długości na powierzchni elipsoidy obliczamy z wzoru:

$$\Delta s \approx \frac{D_o - s_o}{s_o} \cdot s \quad (5.28a)$$

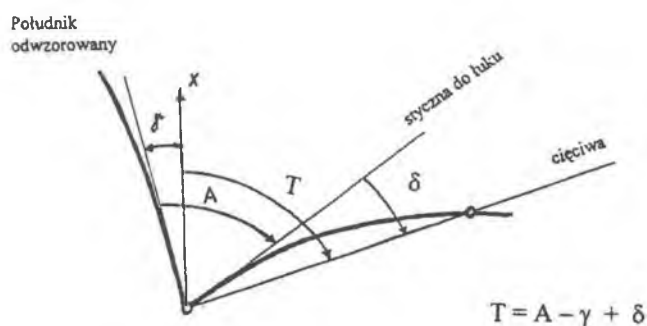
[Pomimo znaku przybliżenia tą prostą metodą (w zależności od błędu współrzędnych przybliżonych) można osiągnąć najwyższą precyzję miary redukcji, zwłaszcza dla bardzo długich linii, będących, na przykład, wynikiem opracowania sieci GPS. W szczególnych sytuacjach realizacja wzorów może być ponawiana w procesie iteracyjnego wyrównania sieci, gdzie w każdym cyklu następuje udokładnianie wektora współrzędnych przybliżonych.]

Weźmy teraz pod uwagę zadanie redukcji kierunków, kątów i azymutów (rys. 5.5 i 5.6). W przypadku kątów i kierunków wielkość poprawki redukcyjnej wynika z

odstępstwa kąтового obrazu linii geodezyjnej i cięciwy łączącej pary punktów (jakkolwiek odwzorowanie jest wiernokątne, tzn. zachowuje miarę kąta pomiędzy odwzorowanymi łukami linii geodezyjnych lub przekrojów normalnych, ale miara ta różni się na ogół od miary kąta pomiędzy odpowiadającymi cięciami. W przypadku redukcji azymutów, oprócz wspomnianej redukcji kierunku obserwacji, najbardziej istotnym komponentem jest zbieżność południków (konwergencja).



Rys. 5.5. Redukcje odwzorowawcze kierunków i kątów



Rys. 5.6. Redukcja azymutu geodezyjnego

Aproksymantą poprawki kierunku jest wielkość

$$\delta = T_0 - A_0 + \gamma \quad (5.29)$$

przy czym dla redukcji kątów lub pęku kierunków wielkość zbieżności południków  $\gamma$  nie musi być znana, gdyż w układzie obserwacyjnym ulega redukcji tak, jak stała orientacji pęku.



## Przykład zastosowania metody empirycznej do redukcji obserwacji

### 1. Utworzenie modelu porównawczego:

Przyjęto współrzędne B, L czterech punktów na elipsoidzie GRS-80, których wzajemne odległości wynoszą w zakresie od ok. 33 do 99 km. Przeliczono je precyzyjnie na współrzędne płaskie w odwzorowaniu *Gaussa-Krügera* i w układzie „1992” oraz obliczono składowe pola zniekształceń (elementarne zniekształcenie długości  $\sigma$  oraz zbieżność południków  $\gamma$ ):

Nr	B	L	X	Y	$\sigma$ [cm/km]	$\gamma$ [°]
1	50° 00' 00"	23° 00' 00"	244636.29119202	786541.92824441	30.885	3.4069470
2	50° 15' 00"	23° 15' 00"	273400.17201287	802861.21366286	42.699	3.6333878 (Tab.1)
3	50° 30' 00"	23° 30' 00"	302221.29919241	818986.45034802	55.015	3.8613597
4	50° 45' 00"	23° 45' 00"	331099.15269704	834916.46092571	67.808	4.0908520

Z kolei dla wektorów 1-2, 1-3, 1-4 obliczono długości i azymuty początkowe odpowiadających linii geodezyjnych na elipsoidzie (zastosowano metodę Gaussa „szerokości średniej”) oraz odpowiadające długości cięciw oraz kąty kierunkowe na płaszczyźnie odwzorowania (posługując się współrzędnymi płaskimi X,Y) :

Plan linii	A (az. geod.)	s (długość linii)	D (cięciwa)	T (kąt kierunkowy)	Red. kierunku $\delta = T - A + \gamma$
Nr(i) Nr(j)	[°]	[m]	[m]	[°]	[cc]
1 2	36.2674621	<b>33058.6867</b>	33070.8318	32.8539516	-65.635
1 3	36.0844738	<b>66067.7579</b>	66095.9920	32.6641809	-133.459 (Tab.2)
1 4	35.9009074	<b>99026.9410</b>	99075.3341	32.4736523	-203.081

### 2. Test metody empirycznej

Zakładamy teraz, że dysponujemy tylko współrzędnymi przybliżonymi punktów.

Przyjmijmy więc, że są to współrzędne zaokrąglone do dziesiątek metrów, co będzie stanowić pewną symulację sytuacji praktycznej.

Na tej podstawie będziemy poszukiwać redukcji długości s do cięciw D oraz redukcji azymutów do odpowiadających kątów kierunkowych (w poprzedniej tabeli było to wyznaczone na podstawie współrzędnych dokładnych). Obecnie wykorzystamy do tego celu współrzędne przybliżone oraz wzory: (5.28) - (5.29):

Nr	Wspórz. przybliż.		Odp. współrzędne geodezyjne		$\sigma$ [cm/km]	$\gamma$ [°]
	X <sub>o</sub>	Y <sub>o</sub> [m]	B <sub>o</sub>	L <sub>o</sub>		
1	<b>244640</b>	<b>786540</b>	50° 00' 00.1231663"	22° 59' 59.9133054"	30.884	3.4069282
2	<b>273400</b>	<b>802860</b>	50° 14' 59.9966840"	23° 14' 59.9383719"	42.698	3.6333731 (Tab.3)
3	<b>302220</b>	<b>818990</b>	50° 29' 59.9510951"	23° 30' 00.1756867"	55.018	3.8614009
4	<b>331100</b>	<b>834920</b>	50° 45' 00.0199952"	23° 45' 00.1828075"	67.811	4.0908961 (Tab.4)

Plan linii	Miary ze współrzędnych przybliżonych			Dług. zreduk	Błąd	Kąt. kier.	Red. kier.	Błąd
Nr(i) Nr(j)	A <sub>o</sub>	s <sub>o</sub>	D <sub>o</sub>	D'	e = D-D'	T <sub>o</sub>	$\delta'$	e= $\delta$ - $\delta'$
1 2	36.2723257	33055.66552	33067.8091	<b>33070.8314</b>	0.0004	32.8588350	<b>-65.625</b>	0.010
1 3	36.0914185	66066.08439	66094.3182	<b>66095.9935</b>	-0.0015	32.6711456	<b>-133.447</b>	0.012
1 4	35.9048515	99027.11273	99075.5066	<b>99075.3366</b>	-0.0025	32.4776160	<b>-203.073</b>	0.008

### 3. Komentarz:

- Tłustym drukiem zaznaczono w tabelach wielkości dane (długości linii geodezyjnych s i współrzędne przybliżone) oraz wielkości wynikowe (długości zredukowane D' i wielkości redukcji kierunków  $\delta'$ ).
- Otrzymane w tabeli 4 wyniki nie różnią się istotnie od odpowiednich wielkości modelowych, otrzymanych ze współrzędnych bezbłędnych.
- W przykładzie przyjęto dane ekstremalne dla zadań geodezyjnych (długości spotykane tylko dla długich wektorów GPS, obszar odwzorowania „1992” o szczególnie dużych zniekształceniach liniowych).
- Zaokrąglając współrzędne przybliżone do dziesiątek metrów, dopuszczono ich błąd < 5m. W praktyce wyrównań sieci będziemy jednak dysponować lepszymi przybliżeniami współrzędnych, uzyskiwanymi w kolejnych iteracjach procesu wyrównawczego.

## b) Metoda interpolacyjna

Metodę interpolacyjną stosujemy w zasadzie tylko do redukowania długości (możliwe jest również interpolacyjne konstruowanie poprawki kierunku, ale ze względu na małą efektywność praktyczną i trudność w ocenie błędu systematycznego sposoby takie pomijamy). Metoda polega na wykorzystaniu skali elementarnej. Biorąc pod uwagę, że wzdłuż boku linii geodezyjnej skala elementarna może się w pewnym zakresie zmieniać, oblicza się w zasadzie jej 3 wartości, tj. w punktach końcowych ( $m_1, m_2$ ) oraz w środku boku ( $m_3$ ). W rezultacie do wyznaczenia całkowitego zniekształcenia długości bierze się skalę „średnią” wyznaczoną z wzoru:

$$m = (m_1 + 4 \cdot m_3 + m_2) / 6 \quad (5.30)$$

[Należy podkreślić, że pierwsza metoda (empiryczna) zawiera zawsze mniejsze ryzyko błędu, zwłaszcza dla linii długich. W drugiej metodzie (jakkolwiek może być to mało istotne) należy uwzględnić dodatkowo różnicę pomiędzy długością linii odwzorowanej a długością cięciwy. Ponadto, metodę należy stosować bardzo „ostrożnie”, zwłaszcza w przypadku odwzorowań o szybko zmieniającej się skali liniowej, bo interpolacja „średniej” skali według (5.30) może być obciążona pewnym błędem metody (systematycznym). Dla typowych odwzorowań stosowanych w obszarze Polski interpolacja w sensie (5.30) jest w zasadzie bezpieczna. Nie zaleca się jej jednak stosować dla linii dłuższych niż 10 km.]

### Przykładowa weryfikacja wzoru interpolacyjnego dla linii długiej

Posłużymy się fragmentem testu przeprowadzonego w metodzie empirycznej. Na odcinku (1-3) o długości ok. 66 km zanotowano następujące zniekształcenia elementarne (możemy je przekształcić na skale)  $\sigma_1 = 30.884$ ,  $\sigma_3 = 42.698$ ,  $\sigma_2 = 55.018$ . Długość odcinka  $s = 66067.7579$  m zredukowana według „średniej” skali wynosi  $D' = 66096.0234$  m, gdy tymczasem poprawnie zredukowana długość  $D = 66095.9920$ . Różnica wynosi zatem ok. 3 cm, co - w zależności od celu zadania - może być efektem zaniedbywalnym. Tak długie linie nie występują oczywiście w klasycznych pomiarach geodezyjnych, jakkolwiek mogą się pojawić w problematyce opracowań pomiarów GPS.

## 5.12. Redukcje odwzorowawcze długości, kątów lub kierunków w odwzorowaniu Gaussa-Krügera przy zastosowaniu wzorów analitycznych

Wzory analityczne, wyrażające wielkości redukcji odwzorowawczych obserwacji wynikają z wyprowadzenia relacji różnicowych pomiędzy odpowiednimi miarami odwzorowanej linii geodezyjnej a miarami wektora (odcinka prostej) na płaszczyźnie. Podane poniżej wzory pochodzą od *J. Balcerzaka* z opracowania dotyczącego podstaw teoretycznych układu „1992”.

Redukcję odwzorowawczą długości określa się wzorem:

$$\Delta D = s \cdot m_s \quad (D = s + \Delta D) \quad (5.31)$$

gdzie ( $m_s$  - skala średnia na długości redukowanej):

$$\begin{aligned}
 m_s = & 1 - (1/2) \cdot U^2 + (5/24) \cdot U^4 - (61/720) \cdot U^6 + U^2 \cdot \Delta X \cdot T \cdot \eta^2 \\
 & - U \cdot \Delta Y/2 + (5/12) \cdot U^3 \cdot \Delta Y - (1/24) \cdot U^2 \cdot \Delta X^2 \\
 & + (4/3) \cdot U \cdot \Delta X \cdot \Delta Y \cdot T \cdot \eta^2 - (1/6) \cdot \Delta Y^2 \\
 & + (5/12) \cdot U^2 \cdot \Delta Y^2
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

oraz

$$\Delta X = (X_2 - X_1) / (R_s \cdot m_o), \quad \Delta Y = (Y_2 - Y_1) / (R_s \cdot m_o) \tag{5.31a}$$

$$U = (Y_1 - y_o) / (R_s \cdot m_o)$$

$X_1, Y_1, X_2, Y_2$  - współrzędne (przybliżone) pary punktów końcowych boku, w konkretnej aplikacji odwzorowania *Gaussa-Krügera*,  
 $y_o$  - parametr przesunięcia układu współrzędnych w konkretnej aplikacji odwzorowania (np. w układzie „1992”:  $y_o = 500000.0$ ),

$R_s = a (1 - e^2)^{1/2} / [1 - e^2 \cdot \sin^2(B)]$  (średni promień krzywizny elipsoidy dla szerokości B),

$\eta^2 = e'^2 \cdot \cos^2(B)$ ,  $T = \operatorname{tg}(B)$  (wielkości pomocnicze)

$e'^2$  - kwadrat drugiego mimośrodu elipsoidy (por. tab. 1.1).

$m_o$  - skala długości na południku środkowym w konkretnej aplikacji odwzorowania (np. w układzie „1992”:  $m_o = 0.9993$ ),

Z tych samych argumentów określa się poprawkę redukcyjną kierunku:

$$\begin{aligned}
 \delta^{cc} = & \{ - [ (1/2) \cdot U + (1/6) \cdot U^3 ] \cdot \Delta X - U^2 \cdot \Delta Y \cdot T \cdot \eta^2 \\
 & + (2/3) \cdot U \cdot \Delta X^2 \cdot T \cdot \eta^2 - [ 1/6 - (1/4) \cdot U^2 ] \cdot \Delta X \cdot \Delta Y \\
 & - (2/3) \cdot \Delta Y \cdot T \cdot \eta^2 \cdot \Delta Y^2 ] \} \cdot \rho^{cc}
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

### Test praktyczny - weryfikacja wzorów analitycznych (5.31) i (5.32) na redukcje długości i kierunku linii geodezyjnych

Postępujemy się ponownie przykładem danych podanym w metodzie empirycznej.

Zredukowane według wzoru (5.31) długości linii geodezyjnych różniły się w stosunku do miar dokładnych kolejno o wartości: 0.0005m (dla  $s = 33$  km), 0.0011 (dla  $s = 66$  km) i 0.0019 (dla  $s = 99$  km) (miary obliczone według wzorów (5.31) były dłuższe od miar dokładnych). To potwierdza jednak „praktyczną” zgodność obu metod.

W zakresie redukcji kierunku stwierdzono natomiast (w analogicznej kolejności) różnice: -0.06 [°], -0.47 [°], -1.60 [°]. Aplikacje wzoru (5.32) należy więc ograniczyć w zasadzie do długości  $< 30$  km.

[Wzory (5.31) i (5.32) spełniają niezbędne kryteria dokładnościowe (numeryczne) dla zastosowań w osnowach geodezyjnych wszystkich klas. W latach 1996-97 były używane w procesach obliczeniowo-wyrównawczych sieci I i II klasy państwowej w układzie „1992”.]

### 5.13. Redukcje odwzorowawcze pól powierzchni (w zastosowaniu uogólnionym do dowolnych odwzorowań konforemnych)

Podstawą redukcji odwzorowawczej pola powierzchni jest **elementarna skala polowa** równa kwadratowi elementarnej skali liniowej:

$$\omega = m^2 \quad (5.33)$$

**Elementarne zniekształcenie polowe** wynosi natomiast  $\tau = \omega - 1$ . Jeśli  $S$  jest polem płata powierzchni elipsoidy, to odpowiadające pole płata odwzorowanego na płaszczyźnie równa się:

$$S_o = S \cdot \omega = S + \Delta S, \quad \Delta S = S \cdot \tau \quad (5.34)$$

gdzie:  $\Delta S$  - **poprawka odwzorowawcza pola**, zaś  $\tau$  oznacza elementarne zniekształcenie polowe wzięte jako wartość przeciętna, wyznaczona dla kilku punktów rozłożonych równomiernie w danym obszarze (np. w siatce kwadratów o boku 100 m). Z wzoru (5.34) wynika również operacja odwrotna, polegająca na wyznaczeniu pola „w naturze” (na elipsoidzie), gdy dane jest pole powierzchni w odwzorowaniu.

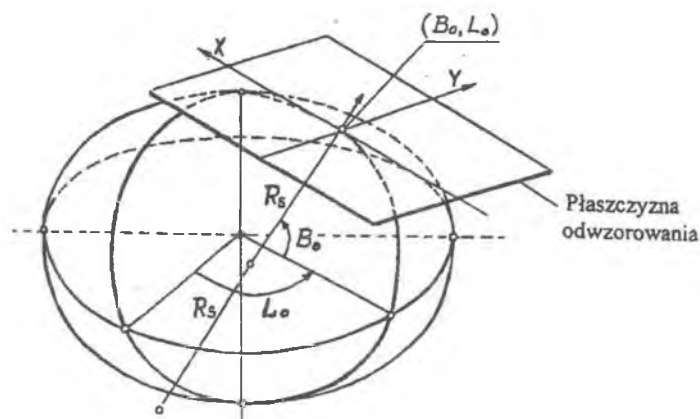
Postępowanie powyższe musi być ograniczone obszarowo ze względu na nieliniową zmienność elementarnej skali polowej i jej wpływ na dokładność numeryczną wielkości redukcji  $\Delta S$ . Jeśli weźmiemy pod uwagę dowolną strefę 3-stopniową układu „2000”, to maksymalny gradient elementarnego zniekształcenia liniowego (zmiana wartości zniekształcenia na odcinku 1 km), jaki występuje na granicy stref (największy gradient dla szerokości najmniejszych, czyli w okolicach równoleżnika 49°) wynosi  $d\sigma \approx 2.7$  mm/km, przy samym zniekształceniu o wartości  $\sigma \approx +70$  mm/km. Niech  $S = 1$  km<sup>2</sup>. Elementarne zniekształcenie polowe  $\tau$  z tytułu zmienności zniekształcenia liniowego waha w granicach od  $\sim 0.000135$  do  $\sim 0.000145$

(niemian.), z czego wynika, że wielkość redukcji pola może mieć rozproszenie wartości pomiędzy 130 a 145 m<sup>2</sup>. Wprowadzenie uśrednienia elementarnego zniekształcenia polowego w danym obszarze zmniejszy te wahania, lecz niekoniecznie wyeliminuje całkowicie istotną wartość błędu określenia redukcji pola. Biorąc pod uwagę, że powyższy przykład dotyczy pewnych warunków ekstremalnych, przyjmujemy regułę, że opisany sposób redukcji będzie mieć zastosowanie do obszarów o rozciągłości nie większej niż 1 km. Alternatywą może być podział obszaru na podobszary o indywidualnie określonych zniekształceniach przeciętnych lub zastosowanie metod analitycznych (obliczenie pól powierzchni płaskich ze współrzędnych w układzie odwzorowawczym oraz pól odpowiadających płatów powierzchni elipsoidy przybliżonej sferą).

## 6. Realizacja układu „1965” oraz GUGiK-80 (operacje 4 i 5)

6.1. Zgodnie z informacjami o układach współrzędnych podanymi w rozdziale 1 układ współrzędnych „1965” jest podzielony na 5 stref odwzorowawczych. W pierwszych czterech strefach zastosowano odwzorowania quasi-stereograficzne, natomiast w strefie piątej - zmodyfikowane odwzorowanie *Gaussa-Krügera*. W każdym przypadku elipsoidą odniesienia była elipsoida *Krasowskiego*. Poszczególne układy współrzędnych nazwaliśmy odpowiednio: **xy65/1 xy65/2 xy65/3 xy65/4 xy65/5**. Tabela 6.1 zawiera podstawowe parametry układów współrzędnych oraz niektóre użyteczne parametry pochodne. Dane te odnoszą się również do jedno-strefowego układu **GUGiK-80**, w którym zastosowano odwzorowanie quasi-stereograficzne.

6.2. Każde odwzorowanie quasi-stereograficzne jest zdefiniowane poprzez punkt przyłożenia płaszczyzny odwzorowawczej ( $B_o, L_o$ ), zwany też **punktem głównym** lub **środkowym odwzorowania** (rys. 6.1) oraz skalą długości  $m_o$  w punkcie głównym, którą nazywamy też skalą podobieństwa odwzorowania. Południk przechodzący przez punkt główny nazywamy południkiem środkowym.



Rys. 6.1. Parametry lokacyjne odwzorowania quasi-stereograficznego

Konstrukcja odwzorowania quasi-stereograficznego opiera się (podobnie jak odwzorowanie *Gaussa-Krügera*) na dwóch założeniach:

- zasadzie odwzorowania południka środkowego,
- warunku wiernokątności odwzorowania.

Południk środkowy powinien odwzorować się w linii prostej, a dowolny punkt tego południka o szerokości geodezyjnej  $B$  powinien odwzorować się w punkt o współrzędnej (rys. 6.2):

$$x = m_o \cdot 2 \cdot R_S \cdot \operatorname{tg} [\Delta s / (2 \cdot R_S)] \quad (6.1)$$

gdzie:

$R_S$  - średni promień krzywizny elipsoidy w punkcie o szerokości  $B_o$  obliczony z wzoru:

$$R_S = (R_M \cdot R_N)^{1/2} \quad (6.2)$$

$R_M, R_N$  - główne promienie krzywizny powierzchni elipsoidy w punkcie o szerokości geodezyjnej  $B_0$ , przy czym  $R_N$  (promień krzywizny przekroju w pierwszym wertykale) był już określony wzorem (4.2), natomiast  $R_M$  (promień krzywizny przekroju południkowego) wyraża się wzorem:

$$R_M = a \cdot (1 - e^2) / [1 - e^2 \cdot \sin^2(B_0)]^{3/2} \quad (6.3)$$

$\Delta s$  - długość odcinka łuku południka elipsoidy, licząc od punktu głównego strefy ( $B_0, L_0$ ) do punktu ( $B, L_0$ ) (rys. 6.2).



Rys. 6.2. Zasada odwzorowania południka środkowego: łuk  $\Delta s$  rozciągamy na sferze o promieniu  $R_s$  (stycznej do elipsoidy w punkcie głównym), a następnie stosujemy rzut stereograficzny



Rys. 6.3. Ilustracja przekształcenia pomiędzy płaszczyznami odwzorowawczymi

**UKŁAD „1965” - parametry podstawowe i pochodne**

**STREFA 1 (odzworowanie quasi-stereograficzne)**

$$\begin{array}{ll}
 B_o = 50^\circ 37' 30'' = 182250.000000'' & \varphi_o = 181570.692447321'' \\
 L_o = 21^\circ 05' 00'' = 75900.000000'' & q_o = 210923.115004595'' \\
 X_o = 5467000.0000\text{ m} & R_s = 6382390.1649837\text{ m} \\
 Y_o = 4637000.0000\text{ m} & s_o = 5610467.5770417\text{ m} \\
 m_o = 0.9998 & \mu_o = 5605231.5783400\text{ m}
 \end{array}$$

**STREFA 2 (odzworowanie quasi-stereograficzne)**

$$\begin{array}{ll}
 B_o = 53^\circ 00' 07'' = 190807.000000'' & \varphi_o = 190141.077483270'' \\
 L_o = 21^\circ 30' 10'' = 77410.000000'' & q_o = 224733.035688177'' \\
 X_o = 5806000.0000\text{ m} & R_s = 6384119.4273046\text{ m} \\
 Y_o = 4603000.0000\text{ m} & s_o = 5874939.8741150\text{ m} \\
 m_o = 0.9998 & \mu_o = 5869806.1756747\text{ m}
 \end{array}$$

**STREFA 3 (odzworowanie quasi-stereograficzne)**

$$\begin{array}{ll}
 B_o = 53^\circ 35' 00'' = 192900.000000'' & \varphi_o = 192238.054488812'' \\
 L_o = 17^\circ 00' 30'' = 61230.000000'' & q_o = 228226.286662695'' \\
 X_o = 5999000.0000\text{ m} & R_s = 6384536.7935655\text{ m} \\
 Y_o = 3501000.0000\text{ m} & s_o = 5939644.7701117\text{ m} \\
 m_o = 0.9998 & \mu_o = 5934541.5223989\text{ m}
 \end{array}$$

**STREFA 4 (odzworowanie quasi-stereograficzne)**

$$\begin{array}{ll}
 B_o = 51^\circ 40' 15'' = 186015.000000'' & \varphi_o = 185341.009526806'' \\
 L_o = 16^\circ 40' 20'' = 60020.000000'' & q_o = 16909.380486742'' \\
 X_o = 5627000.0000\text{ m} & R_s = 383155.1651299\text{ m} \\
 Y_o = 3703000.0000\text{ m} & s_o = 5726819.6678288\text{ m} \\
 m_o = 0.9998 & \mu_o = 5721624.2630263\text{ m}
 \end{array}$$

**STREFA 5 (odzworowanie Gaussa-Krügera)**

$$\begin{array}{l}
 L_o = 18^\circ 57' 30'' = 68250.000000'' \text{ (południk środkowy)} \\
 X_o = -4700000.0, Y_o = 237000.0 \text{ (parametry przesunięcia układu współrzędnych)} \\
 m_o = 0.999983 \text{ (skala długości na południku środkowym)}
 \end{array}$$

**Objaśnienia dla stref 1 - 4 :**

$B_o, L_o$  - współrzędne geodezyjne punktu głównego,  
 $X_o, Y_o$  - współrzędne płaskie punktu głównego,  
 $m_o$  - skala długości w punkcie głównym,  
 $\varphi_o$  - szerokość geograficzna punktu głównego w odzworowaniu *Lagrange'a*,  
 $q_o$  - szerokość izometryczna punktu głównego,  
 $R_s$  - średni promień krzywizny powierzchni elipsoidy w punkcie głównym,  
 $s_o$  - długość łuku południka elipsoidy od równika do punktu głównego strefy,  
 $\mu_o$  - odpowiadająca  $s_o$  długość łuku południka sfery *Lagrange'a* o promieniu  $R_o$ ,  
 którego wartość podano w tabeli 1.1.



UKŁAD GUGIK-80 - parametry podstawowe i pochodne (odwzorowanie quasi-stereograficzne)	
$B_o = 52^{\circ} 10' 00'' = 187800.0''$	$\varphi_o = 187128.845285428''$
$L_o = 19^{\circ} 10' 00'' = 69000.0''$	$q_o = 219796.089757086''$
$X_o = 500000.0000 \text{ m}$	$R_S = 6383515.6754446 \text{ m}$
$Y_o = 500000.0000 \text{ m}$	$s_o = 5781989.9020447 \text{ m}$
$m_o = 0.9997142857$	$\mu_o = 5776816.1737694 \text{ m}$

Objaśnienia parametrów analogiczne jak w tabeli 6.1.  
**Uwaga dodatkowa:** przy faktycznej realizacji układu **GUGIK-80** dla map topograficznych w skalach 1:100000 dokonano dodatkowej (zamierzonej) translacji układu o kilkadziesiąt metrów.

Zgodnie z powyższym określeniem długość  $\Delta s$  można wyrazić również jako różnicę odciętych pary punktów w odwzorowaniu *Gaussa-Krügera*, z południkiem środkowym  $L_o$  i skalą  $m_o = 1$ :

$$\Delta s = s - s_o = \Delta x_{GK} \quad (6.4)$$

6.3. Z własności określonych w p. 6.2 wynika, że pomiędzy odwzorowaniem quasi-stereograficznym, z punktem głównym ( $B_o, L_o$ ) i skalą  $m_o$ , a odwzorowaniem *Gaussa-Krügera*, z południkiem środkowym  $L_o$  i skalą jednostkową na południku środkowym, zachodzi bezpośrednia zależność w dziedzinie zespolonej:

$$W = \text{tg}(w) \quad (6.5)$$

gdzie  $\text{tg}$  oznacza funkcję **tangensa zespolonego**,

$$w = (u, v), \quad u = (x_{GK} - s_o) / (2 \cdot R_S), \quad v = y_{GK} / (2 \cdot R_S) \quad (6.5a)$$

jest przekształconą, zespoloną współrzędną *Gaussa-Krügera* (odcięta przesunięta o wielkość  $s_o$  i obie współrzędne unormowane dzielnikiem  $2 \cdot R_S$ ),

$$W = (U, V), \quad U = x / (2 \cdot R_S \cdot m_o), \quad V = y / (2 \cdot R_S \cdot m_o) \quad (6.5b)$$

jest zespoloną, scentrowaną i unormowaną współrzędną w odwzorowaniu quasi-stereograficznym, przy czym w konkretnych aplikacjach do stref 1-4 układu „1965” lub układu **GUGIK-80** podstawiamy:  $x = X - X_o$ ,  $y = Y - Y_o$ , gdzie  $X_o$ ,  $Y_o$  oznaczają parametry przesunięcia początków układów współrzędnych, podane w tabeli 6.1 lub 6.2.

[Zależność powyższa została sformułowana przez *J. Panasiuka, B. Gdowskiego i J. Balcerzaka* w roku 1993 w pracy „The Roussilhe projection of the entire ellipsoid” (16th Int. Cartographic Conference, Cologne, 1993).

Analogiczną formułę zespoloną, ale w uproszczeniu do sfery (odwzorowanie stereograficzne

i *Mercatora*) przedstawił *R. Kadaj* w referacie „Wzajemne przekształcenie płaszczyzn odwzorowań kartograficznych”. VI Ogólnopolskie Seminarium Kół Naukowych Geodetów, Wrocław, 13-14 XII 1968.]

Wzór (6.5) może stanowić zarówno formalną definicję odwzorowania quasi-stereograficznego, jak też (w zależności od możliwości narzędzi programowania) definicję algorytmu numerycznej realizacji odwzorowania quasi-stereograficznego w oparciu o dostępne procedury odwzorowania *Gaussa-Krügera* oraz funkcję zespoloną **tangens**.

Z przekształcenia (6.5) wynika wprost zespolona zależność odwrotna

$$\mathbf{w} = \text{arc tg} (\mathbf{W}) \quad (6.6)$$

która definiuje odwrotne odwzorowanie quasi-stereograficzne w stosunku do odwzorowania *Gaussa-Krügera*. Może być ono również algorytmem postępowania w przypadku, gdy dysponujemy procedurami obliczeniowymi funkcji zespolonych o odpowiedniej precyzji.

#### 6.4. Algorytm szczegółowy A realizacji układu „1965” z wykorzystaniem procedur odwzorowania Gaussa-Krügera

Formułę (6.5) z funkcją zespoloną **tangens** przedstawiamy za pomocą rozwinięcia w szereg *Taylora*, ograniczając się do wyrazów stopnia 9 i zapisując w postaci następującego wzoru *Hornera*:

$$\mathbf{W} = \mathbf{w} \cdot (a_1 + \mathbf{w}^2 \cdot (a_3 + \mathbf{w}^2 \cdot (a_5 + \mathbf{w}^2 \cdot (a_7 + \mathbf{w}^2 \cdot a_9)))) \quad (6.7)$$

gdzie współczynniki:

$$a_1 = 1$$

$$a_3 = 1/3$$

$$a_5 = 2/15$$

$$a_7 = 17/315$$

$$a_9 = 62/2835$$

Zgodnie z formułami *Gaussa-Krügera* (opisanymi w rozdziale 5, ale tym razem przy uwzględnieniu parametrów elipsoidy *Krasowskiego*) i wzorami (6.5a), dla dowolnego punktu transformowanego wyznaczamy argument zespolony  $\mathbf{w} = (u, v)$ . Wykonanie operacji wskazanych w formule (6.7) będzie prowadziło do wyznaczenia zmiennej zespolonej  $\mathbf{W}$  związanej już bezpośrednio ze współrzędnymi odwzorowania quasi-stereograficznego poprzez zależności (6.5b). Ostateczne wartości współrzędnych dla danej strefy układu „1965” otrzymamy po dodaniu odpowiednich stałych  $X_0, Y_0$ , według danych z tabeli 6.1 lub dla układu **GUGiK-80** według tabeli 6.2.

**[Objaśnienie.** Obliczenie wartości wielomianu zespolonego w postaci (6.7) musi przebiegać zgodnie z zasadami operacji arytmetycznych na liczbach zespolonych. Do wykonania tego obliczenia (rozpoczynając od wyrażenia w nawiasie wewnętrznym) wystarczy wiedzieć, jak wykonuje się dodawanie i mnożenie dwóch liczb zespolonych (wyniki tych operacji, jak i końcowa wartość wielomianu jest też liczbą zespoloną). Niech dla przykładu,  $\mathbf{w}_1 = (u_1, v_1)$ ,

$w_2 = (u_2, v_2)$  będą dwiema liczbami zespolonymi. Wynikiem ich dodawania i mnożenia są liczby zespolone określone następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 &= (u_1 + u_2, v_1 + v_2) \\ \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2 &= (u_1 \cdot u_2 - v_1 \cdot v_2, u_1 \cdot v_2 + u_2 \cdot v_1) \end{aligned} \quad (6.8)$$

(potęgowanie liczby zespolonej jest zdefiniowane oczywiście przez mnożenie).]

W analogii do formuły (6.7) możemy utworzyć algorytm odwzorowania odwrotnego (6.6), poprzez rozwinięcie funkcji zespolonej **arcus tangens**:

$$\mathbf{w} = \mathbf{W} \cdot (b_1 + \mathbf{W}^2 \cdot (b_3 + \mathbf{W}^2 \cdot (b_5 + \mathbf{W}^2 \cdot (b_7 + \mathbf{W}^2 \cdot b_9)))) \quad (6.9)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 \\ b_3 &= -1/3 \\ b_5 &= 1/5 \\ b_7 &= -1/7 \\ b_9 &= 1/9 \end{aligned}$$

Dla danych współrzędnych punktu w określonej strefie układu „1965”, po ich scen-trowaniu i unormowaniu, wyznaczamy liczbę zespoloną  $\mathbf{W}$ . Z wzoru (6.9) otrzymujemy wynikową liczbę zespoloną  $\mathbf{w}$ , a w oparciu o nią - współrzędne *Gaussa-Krügera*, uwzględniając zależności (6.5a). Algorytm odwrotny odwzorowania *Gaussa-Krügera* prowadzi w efekcie do wyznaczenia odpowiednich współrzędnych geodezyjnych  $B, L$ .

### 6.5. Algorytm szczegółowy B realizacji układu „1965” przy wykorzystaniu współrzędnych odwzorowania poprzecznego *Mercatora*

Zarówno odwzorowanie quasi-stereograficzne (zrealizowane w strefach 1-4 układu „1965”), jak też odwzorowanie *Gaussa-Krügera* (zrealizowane w strefie 5) można otrzymać przez przekształcenie innego, prostszego odwzorowania tej samej elipsoidy (*Krasowskiego*). Tym wyjściowym odwzorowaniem dla „konstrukcji” układu „1965” może być opisane w rozdziale 5 odwzorowanie poprzeczne *Mercatora*, skonstruowane na sferze *Lagrange’a*, będącej tym razem wiernokątnym odwzorowaniem powierzchni elipsoidy *Krasowskiego*. Z uwagi na wiernokątność wszystkich odwzorowań szukane przekształcenia dają się utworzyć przy wykorzystaniu zespolonych szeregów potęgowych (wielomianów zespolonych). Podajemy w dalszym ciągu uzyskane funkcje odwzorowawcze dla wszystkich stref układu „1965” przy wykorzystaniu współrzędnych odwzorowania poprzecznego *Mercatora*.

Odwzorowanie „wprost” dla każdej strefy układu „1965”, jak też dla układu **GUGiK-80** można wyrazić ogólnym, aproksymującym wielomianem zespolonym:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 + m_0 \cdot \sum_{j=1 \dots 7} a_j \cdot \mathbf{z}^j \quad (6.10)$$

gdzie:

$$\mathbf{Z} = (X, Y) \quad - \text{współrzędne ostateczne w układzie „1965”,}$$

$Z_0 = (X_0, Y_0)$  - współrzędne punktów głównych stref 1-4 układu „1965” lub „GUGiK-80” (tab. 6.1, 6.2) lub umownego punktu na południku środkowym strefy 5 (odpowiednie wartości podano w tabeli (6.3), które różnią się (!) od podanych w tabeli (6.2)),

$\underline{z} = (x_M - \mu_0, y_M) \cdot c$  ( $c$  - faktor normujący (por. tab. 6.3)) (6.10 a)  
- unormowany argument zespolony, jakim są „przesunięte” współrzędne odwzorowania *Mercatora* ( $x_M, y_M$ ).

W tabelicy 6.3 (z kontynuacją) podano wykazy współczynników wielomianów dla poszczególnych stref i układu GUGiK-80 oraz parametry:  $m_0$  - centrująca wartość współrzędnej *Mercatora* dla punktu głównego strefy,  $c$  - faktor normalizujący argument wielomianu. Brakujące parametry dla realizacji formuł odwzorowawczych pobieramy z tabeli 6.1 i 6.2 (parametry centrujące  $X_0, Y_0$  w układzie „1965”. Wszystkie wielomiany są stopnia 7. To wystarczy, by w obszarze każdej strefy uzyskać poprawne współrzędne z dokładnością wyższą niż wymagania praktyczne. Przypomnijmy jeszcze, że pozyskanie wejściowych współrzędnych *Mercatora* w oparciu o współrzędne geodezyjne  $B, L$  było omówione w poprzednim rozdziale dotyczącym odwzorowania *Gaussa-Krügera*.

Odwzorowanie odwrotne do opisanego realizujemy za pomocą zespolonych szeregów potęgowych, także 7. stopnia:

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \sum_{j=1 \dots 7} b_j \cdot \underline{\mathbf{z}}^j \quad (6.11)$$

przy czym oznaczono:

$$\mathbf{z} = (x_M, y_M), \mathbf{z}_0 = (\mu_0, 0) \quad (6.11a)$$

$$\underline{\mathbf{z}} = (X - X_0, Y - Y_0) \cdot c / m_0 \quad (6.11b)$$

Sposób wyznaczenia wartości wielomianu zespolonego był już omówiony wcześniej.

## 6.6. Algorytm szczegółowy C wykorzystujący współrzędne izometryczne ( $q, l$ ) oraz inne rozwiązania

[Niezależnie od przedstawionych już algorytmów odwzorowania zastosowane w każdej strefie układu „1965” można otrzymać jako przekształcenie dowolnego innego odwzorowania wiernokątowego elipsoidy. W algorytmie A odwzorowaniem pierwotnym było odwzorowanie *Gaussa-Krügera*, natomiast w algorytmie B - złożenie odwzorowania *Lagrange'a* elipsoidy na sferę oraz wiernokątowego odwzorowania walcowego poprzecznego *Mercatora*. Zamiast tego ostatniego można by równie poprawnie przyjąć wiernokątne odwzorowanie walcowe normalne *Mercatora*. Takie ujęcie prowadzi wprost do zastosowania współrzędnych izometrycznych ( $q, l$ ), które są w istocie równe współrzędnym odwzorowania *Mercatora* (normalnego) dla umownej sfery o promieniu jednostkowym. Używane w wariantcie B współrzędne *Mercatora* (poprzecznego) stanowią odpowiedniki współrzędnych izometrycznych - stałyby się nimi dokładnie wtedy, gdyby układ współrzędnych geograficznych sfery obrócić o  $90^\circ$  do pokrycia się równika z płaszczyzną południka styczności walca ze sferą. Ze względów numerycznych wykorzystanie współrzędnych *Mercatora* „poprzecznego” lub izometrycznych (*Mercatora* „normalnego”) jest najkorzystniejsze wtedy, gdy obszar odwzorowywany jest

PRZEKSZTAŁCENIE WPROST (X,Y) <sub>MERCATOR</sub> ⇒ (X,Y) <sub>1965</sub> (lub GUGIK-80)	PRZEKSZTAŁCENIE ODWROTNE (X,Y) <sub>1965</sub> ⇒ (X,Y) <sub>MERCATOR</sub> (lub GUGIK-80)
<b>STREFA 1</b> Parametry ogólne: $\mu_0 = 5605231.5783400$ m (współrzędna x Mercatora dla punktu głównego strefy), $c = 3.0 \cdot 10^{-6}$ (faktor normujący), $m_0 = 0.9998$ $X_0 = 5467000.0$ $Y_0 = 5637000.0$	
$a_1 = 333227.0624101556$	$b_1 = 333439.6381478428$
$a_2 = -28.6675217281$	$b_2 = 28.6949579361$
$a_3 = 75.8952783619$	$b_3 = -75.9872022511$
$a_4 = 0.0065401850$	$b_4 = -0.0392479709$
$a_5 = 0.0206512101$	$b_5 = 0.0312507059$
$a_6 = -0.0000004759$	$b_6 = 0.0000401874$
$a_7 = 0.0000057158$	$b_7 = -0.0000153275$
<b>STREFA 2</b> Parametry ogólne: $\mu_0 = 5869806.1756747$ , $c = 3.0 \cdot 10^{-6}$ , $m_0 = 0.9998$ $X_0 = 5806000.0$ $Y_0 = 5603000.0$	
$a_1 = 333181.9827849548$	$b_1 = 333484.7526338929$
$a_2 = -28.0950601085$	$b_2 = 28.1333647140$
$a_3 = 75.9055149002$	$b_3 = -76.0387848715$
$a_4 = 0.0063802342$	$b_4 = -0.0384695549$
$a_5 = 0.0206265298$	$b_5 = 0.0313225152$
$a_6 = -0.0000004820$	$b_6 = 0.0000394335$
$a_7 = 0.0000056994$	$b_7 = -0.0000154337$
<b>STREFA 3</b> Parametry ogólne: $\mu_0 = 5934541.5223989$ , $c = 3.0 \cdot 10^{-6}$ , $m_0 = 0.9998$ $X_0 = 599000.0$ $Y_0 = 3501000.0$	
$a_1 = 333171.1028912454$	$b_1 = 333495.6427700162$
$a_2 = -27.9254488581$	$b_2 = 27.9662618007$
$a_3 = 75.9079748119$	$b_3 = -76.0512394117$
$a_4 = 0.0063346229$	$b_4 = -0.0382385356$
$a_5 = 0.0206205581$	$b_5 = 0.0313398948$
$a_6 = -0.0000004872$	$b_6 = 0.0000392133$
$a_7 = 0.0000055657$	$b_7 = -0.0000152892$
<b>STREFA 4</b> Parametry ogólne: $\mu_0 = 5721624.2630263$ , $c = 3.0 \cdot 10^{-6}$ , $m_0 = 0.9998$ $X_0 = 5627000.0$ $Y_0 = 3703000.0$	
$a_1 = 333207.1195991902$	$b_1 = 333459.5948752984$
$a_2 = -28.4397326812$	$b_2 = 28.4720625239$
$a_3 = 75.8998158215$	$b_3 = -76.0100177912$
$a_4 = 0.0064749804$	$b_4 = -0.0389384167$
$a_5 = 0.0206401938$	$b_5 = 0.0312825358$
$a_6 = -0.0000004287$	$b_6 = 0.0000398372$
$a_7 = 0.0000057246$	$b_7 = -0.0000153393$

**STREFA 5** Parametry ogólne:  $\mu_o = 5500000.000000$ ,  $c = 3.0 \cdot 10^{-6}$ ,  
 $m_o = 0.999983$   
 $X_o = 5505266.6847655941 \cdot m_o - 4700000$        $Y_o = 237000.0$

$a_1 =$	333245.2190803275	$b_1 =$	333421.4708848618
$a_2 =$	-28.8406389500	$b_2 =$	28.8635224876
$a_3 =$	0.1662497262	$b_3 =$	-0.1614283309
$a_4 =$	0.0262526680	$b_4 =$	-0.0263583429
$a_5 =$	-0.0001027477	$b_5 =$	0.0000894755
$a_6 =$	-0.0000100419	$b_6 =$	0.0000102010
$a_7 =$	0.0000008933	$b_7 =$	-0.0000008728

**GUGIK - 80** Parametry ogólne:  $\mu_o = 5776816.1737694$ ,  $c = 2.0 \cdot 10^{-6}$ ,  
 $m_o = 0.9997142857$        $X_o = 500000.0$        $Y_o = 500000.0$

$a_1 =$	499796.5823740662	$b_1 =$	500203.5004170152
$a_2 =$	-63.7165763633	$b_2 =$	63.7944061334
$a_3 =$	256.1690783300	$b_3 =$	-256.5701045051
$a_4 =$	0.0326088612	$b_4 =$	-0.1962905015
$a_5 =$	0.1566979491	$b_5 =$	0.2376643078
$a_6 =$	-0.0000051888	$b_6 =$	0.0004521744
$a_7 =$	0.0000975391	$b_7 =$	-0.0002624705

#### SYNTEZA WZORÓW

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_o + m_o \cdot \sum_{j=1..7} a_j \cdot \mathbf{z}^j$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_o + \sum_{j=1..7} b_j \cdot \mathbf{z}^j$$

$$\mathbf{Z} = (X, Y), \mathbf{Z}_o = (X_o, Y_o)$$

$$\mathbf{z} = (x_M, y_M), \mathbf{z}_o = (\mu_o, 0)$$

$$\mathbf{z} = (x_M - \mu_o, y_M) \cdot c$$

$$\mathbf{Z} = (X - X_o, Y - Y_o) \cdot c / m_o$$

gdzie:  $(x_M, y_M)$  - współrzędne Mercatora

#### Uwagi:

- Wszelkie deklarowane zmienne i funkcje powinny mieć co najmniej 8-bajtową długość. Błąd numeryczny przekształcenia współrzędnych w obszarze stref nie wykracza poza poziom setnych części milimetra.
- W strefie 5 wartość  $\mu_o$  jest wielkością przyjętą jako umowny parametr centrujący współrzędnych Mercatora, skutkiem tego współrzędna centrująca  $X_o$  różni się od tej podanej w tabeli 6.1

położony w otoczeniu okręgu styczności walca ze sferą. Dla obszaru Polski (położonej daleko od równika) mniej korzystne byłoby zatem operowanie współrzędnymi izometrycznymi, stąd też w prezentowanych poprzednio algorytmach oparliśmy się na współrzędnych Mercatora poprzecznego. Pomimo istnienia wspomnianych uwarunkowań numerycznych przeprowadzone badania numeryczne nie potwierdzają istnienia różnic pomiędzy wyróżnionymi rozwiązaniami, które mogłyby mieć realne znaczenie praktyczne. Dlatego dla celów porównawczych (testowych) przytaczamy również stosowne wzory odwzorowań w układzie „1965” przy wykorzystaniu współrzędnych izometrycznych  $(q, l)$ .

Analogicznie do współrzędnych *Mercatora* „poprzecznego” dla sfery jednostkowej, oznaczonych przez  $\alpha, \beta$  - por. wzory: (5.5b) oraz (5.4), współrzędne izometryczne ( $q, l$ ) pozostają w jawnym związku ze współrzędnymi geograficznymi ( $\varphi, \lambda$ ):

$$q = \ln \operatorname{tg} (\varphi / 2 + \pi / 4) \text{ lub (odwrotnie) } \varphi = 2 \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} [ \exp(q) ] - \pi / 2 \quad (6.12)$$

$$l = L - L_0 \quad (\text{w rozdziale 5, przy omawianiu odwzorowania poprzecznego } \textit{Mercatora}, \text{ tę wielkość oznaczano przez } \Delta\lambda)$$

(za  $L_0$  będziemy przyjmować długość geodezyjną punktu głównego w danej strefie układu „1965”). Tak więc w analogii do algorytmu B tutaj posługujemy się podobnymi wielomianami przekształcającymi współrzędne ( $q, l$ ) na współrzędne w układzie „1965”. Tabela 6.4 zawiera wykazy współczynników wielomianów i parametrów numerycznych dla poszczególnych stref układu „1965” oraz przedstawia syntetyczne wzory stosowane w transformacjach „wprost” i odwrotnych.

Istnieje kilka innych realizacji układu „1965”. Do podstawowych należy zaliczyć sposób wyrażający współrzędne w układzie odwzorowawczym wprost w funkcji współrzędnych geodezyjnych. Konkretnie algorytmy tego rodzaju znajdziemy w podręczniku *I. Gajderowicza*\*).

### 6.7. Zniekształcenia elementarne oraz konwergencje w układach „1965” i GUGiK-80 wyrażone wzorami aproksymacyjnymi

Stosownie do wzorów (5.16), (5.17) składowe pola zniekształceń w odwzorowaniu quasi-stereograficznym można by wyrazić jako złożenie odpowiednich parametrów odwzorowań cząstkowych, z których konstruuje się prawa odwzorowawcze. Ostateczne formuły sprowadzają się do prostych wzorów algebraicznych. Zniekształcenia elementarne długości w układzie „1965” można przedstawić dostatecznie dokładnie za pomocą następujących formuł aproksymacyjnych:

$$\sigma = a_{00} + a_{20} \cdot u^2 + a_{02} \cdot v^2 + a_{12} \cdot u \cdot v^2 \quad (\text{strefy 1-4 „1965”}) \quad (6.13)$$

$$\sigma = a_{00} + a_{02} \cdot v^2 + a_{12} \cdot u \cdot v^2 \quad (\text{strefa 5 „1965”}) \quad (6.14)$$

gdzie argumenty  $u, v$  są odpowiednio scentrowanymi i unormowanymi współrzędnymi punktów,

$$u = (X - X_0) \cdot c, \quad v = (Y - Y_0) \cdot c, \quad (6.14a)$$

natomiast  $X_0, Y_0, c$  oraz współczynniki  $a_{ij}$  wielomianów są - dla poszczególnych stref układu „1965” - wielkościami stałymi. Wyszczególniono je w tabeli 6.5. We wzorze (6.13) adekwatnym dla odwzorowań quasi-stereograficznych zachodzi  $a_{20} = a_{02}$ .

\*) *Gajderowicz I.*: Kartografia matematyczna dla geodetów. Wyd. ART w Olsztynie. 1991, wyd. II -1999.

<b>REALIZACJA ODWZOROWANIA QUASI-STEREOGRAFICZNEGO DLA POSZCZEGÓLNYCH STREF UKŁADU „1965” PRZY WYKORZYSTANIU WSPÓLRZĘDNYCH IZOMETRYCZNYCH</b>	
<b>PRZEKSZTAŁCENIE WPROST</b> $(q, l) \Rightarrow (x, y)_{1965}$	<b>PRZEKSZTAŁCENIE ODWROTNE</b> $(x, y)_{1965} \Rightarrow (q, l)$
<b>STREFA 1</b> Współrzędna izometryczna punktu głównego: $q_0 = 210923.115004595 ["]$ , $L_0 = 75900.0 ["]$	
Współrzędne płaskie punktu głównego: $X_0 = 5467000.0, Y_0 = 4637000.0,$	
Skala w punkcie głównym: $m_0 = 0.9998$	
$c = 0.6 \cdot 10^{-4}$ (faktor normujący)	$d = 0.3 \cdot 10^{-5}$ (faktor normujący)
$a_1 = 327607.3515430263$	$b_1 = 16957.9697445379$
$a_2 = -10231.3425781035$	$b_2 = 538.8624858172$
$a_3 = 141.0895055685$	$b_3 = 26.6854179294$
$a_4 = 1.1908592360$	$b_4 = 1.4543487532$
$a_5 = -0.0966834909$	$b_5 = 0.0848325172$
$a_6 = 0.0018411637$	$b_6 = 0.0051525457$
$a_7 = 0.0000004325$	$b_7 = 0.0003219021$
	$b_8 = 0.0000205406$
	$b_9 = 0.0000012902$
<b>STREFA 2</b> Parametry ogólne: $q_0 = 224733.035688177, L_0 = 77410.0$ $X_0 = 5806000.0, Y_0 = 4603000.0, m_0 = 0.9998$	
$c = 0.6 \cdot 10^{-4}$	$d = 0.3 \cdot 10^{-5}$
$a_1 = 310811.6965097071$	$b_1 = 17874.3451998192$
$a_2 = -10028.8398721940$	$b_2 = 618.5358492953$
$a_3 = 154.3395314224$	$b_3 = 32.5997059066$
$a_4 = 0.5006773332$	$b_4 = 1.9015619897$
$a_5 = -0.0835020691$	$b_5 = 0.1185861657$
$a_6 = 0.0018994452$	$b_6 = 0.0077016300$
$a_7 = -0.0000110886$	$b_7 = 0.0005144506$
	$b_8 = 0.0000350782$
	$b_9 = 0.0000025951$
<b>STREFA 3</b> Parametry ogólne: $q_0 = 228226.286662695, L_0 = 61230.0$ $X_0 = 5999000.0, Y_0 = 3501000.0, m_0 = 0.9998$	
$c = 0.7 \cdot 10^{-4}$	$d = 0.4 \cdot 10^{-5}$
$a_1 = 262817.3053570458$	$b_1 = 13589.0160146667$
$a_2 = -7323.9640231092$	$b_2 = 360.2187418498$
$a_3 = 98.9525992482$	$b_3 = 14.4679231874$
$a_4 = 0.1823961793$	$b_4 = 0.6438775936$
$a_5 = -0.0370208951$	$b_5 = 0.0306291368$
$a_6 = 0.0007523048$	$b_6 = 0.0015174173$
$a_7 = -0.0000042986$	$b_7 = 0.0000773229$
	$b_8 = 0.0000040196$
	$b_9 = 0.0000002079$



<b>STREFA 4</b> Parametry ogólne:	$q_0 = 216909.380486742$ , $L_0 = 60020.0$ $X_0 = 5627000.0$ , $Y_0 = 3703000.0$ , $m_0 = 0.9998$
$c = 0.6 \cdot 10^{-4}$	$d = 0.3 \cdot 10^{-5}$
$a_1 = 320285.8527160487$	$b_1 = 17345.6164499414$
$a_2 = -10150.8545599975$	$b_2 = 572.1311286823$
$a_3 = 147.2760090614$	$b_3 = 29.1035154249$
$a_4 = 0.8828684018$	$b_4 = 1.6336118604$
$a_5 = -0.0911193529$	$b_5 = 0.0980895169$
$a_6 = 0.0018804394$	$b_6 = 0.0061333515$
$a_7 = -0.0000039810$	$b_7 = 0.0003945082$
	$b_8 = 0.0000258856$
	$b_9 = 0.0000015764$
<b>STREFA 5</b> Współrzędna izometryczna centrująca:	$q_0 = 208000.0000000000$ [ " ],
Długość geodezyjna południka środkowego:	$L_0 = 68250.0$ [ " ],
Współrzędne płaskie centrujące:	$Y_0 = 237000.0$
Skala w południku środkowym:	$m_0 = 0.999983$
	$X_0 = 5552694.451723232 \cdot m_0 - 4700000$
$c = 0.8 \cdot 10^{-4}$	$d = 0.4 \cdot 10^{-5}$
$a_1 = 248401.8357604078$	$b_1 = 12580.42232430972$
$a_2 = -5774.7642812267$	$b_2 = 294.34718626987$
$a_3 = 26.7809815640$	$b_3 = 12.39998104380$
$a_4 = 2.6129242146$	$b_4 = 0.51004971724$
$a_5 = -0.0893009269$	$b_5 = 0.02313984037$
$a_6 = 0.0007488489$	$b_6 = 0.00108099850$
$a_7 = 0.0000453037$	$b_7 = 0.00005208507$
	$b_8 = 0.00000256730$
	$b_9 = 0.00000013332$
<b>SYNTEZA WZORÓW</b>	
$Z = Z_0 + m_0 \cdot \sum_{j=1 \dots 7} a_j \cdot p^j$	$p = p_0 + \sum_{j=1 \dots 9} b_j \cdot \underline{Z}$
$p = (q'' - q_0'', l'') \cdot c$	$\underline{Z} = (X - X_0, Y - Y_0) \cdot d / m_0$
$Z = (X, Y)$ , $Z_0 = (X_0, Y_0)$	$p = (q'', l'')$ , $p_0 = (q_0'', 0)$
$q'' = q [ rad ] \cdot \rho''$ , $l'' = L'' - L_0''$	<b>Uwaga:</b> podany dla strefy 5 parametr centrujący $X_0$ różni się od identycznie oznaczonego parametru w tabeli 6.2 - tam jako parametru przesunięcia współrzędnej Gaussa-Krügera.
$\rho'' = 648000.0 / 3.141592653589793$	

Oznaczając ponadto

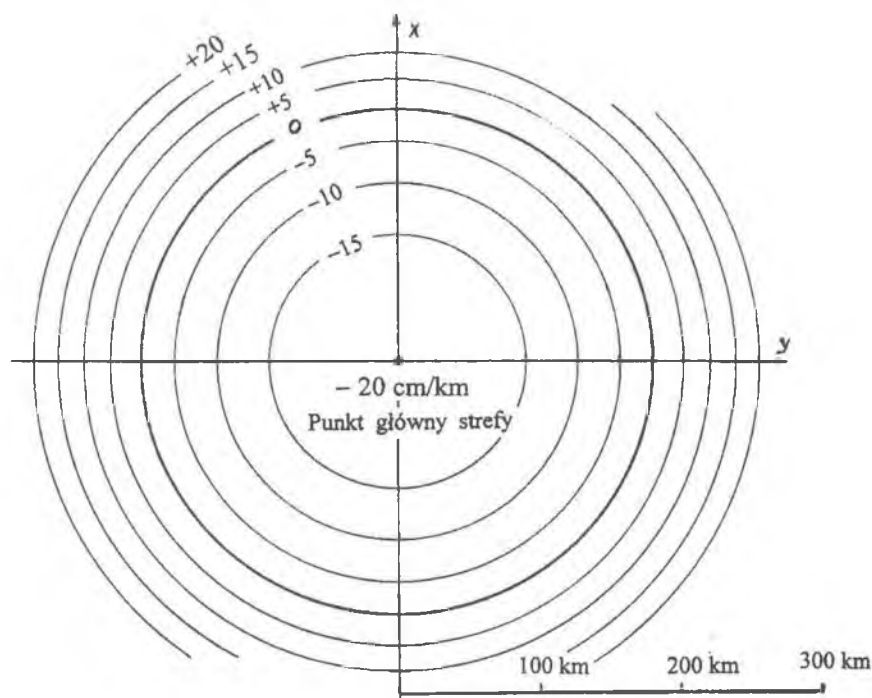
$$d^2 = u^2 + v^2, \quad (6.15)$$

która to wielkość jest kwadratem odległości danego punktu od punktu głównego strefy, zapiszemy wzór (6.13) w uproszczonej postaci:

$$\sigma = a_{00} + a_{20} \cdot d^2 + a_{12} \cdot u \cdot v^2 \quad (6.13a)$$

Ostatni człon w strefach 1-4 układu „1965” nie przekracza wartości 1mm/km, a więc dla większości prac geodezyjnych jest wielkością zaniedbywalną. Człon ten wynosi 7 mm/km w układzie GUGiK-80, obejmującym obszar całego kraju, czyli dla  $d > 300$  km (w tabelicy 6.5, dla układu GUGiK-80, zilustrowano również wpływ wyrazu szeregu zawierającego współczynnik  $a_{22}$ , ale - jak widać - nie jest to jednak wpływ praktycznie istotny). W świetle wzoru (6.14) izoliny zniekształceń w każdym odwzorowaniu quasi-stereograficznym będą zbliżone do współśrodkowych okręgów (ze środkiem w punkcie głównym strefy) - rys. 6.4. Wzór (6.14) przyjęty dla strefy 5 (z odwzorowaniem *Gaussa-Krügera*) upraszcza się również tylko do pierwszych dwóch składników (zniekształcenie liniowe staje się praktycznie funkcją kwadratu odległości punktu od południka środkowego strefy). Uproszczenie powyższe jest związane jednak z niewielkim stosunkowo obszarem strefy 5, dla którego składniki zniekształceń wyższego stopnia nie są praktycznie istotne.

Wszystkie współczynniki  $a_{ij}$  są tak dobrane, by obliczona wartość elementarnego zniekształcenia liniowego wyrażała się w cm/km. Chcąc teraz obliczyć elementarną skalę liniową  $m$ , należy posłużyć się definicją zniekształcenia elementarnego przedstawioną w rozdziale 5.



Rys. 6.4. Ilustracja izolinii zniekształceń elementarnych w strefach 1-4 układu 1965

**Wpółczynniki wielomianów aproksymujących składowe pola  
zniekształceń w układzie „1965” i GUGiK-80**

**elementarne zniekształcenie liniowe****konwergencja**

**STREFA 1** parametry centrujące:  $X_0 = 5467000.0$   $Y_0 = 4637000.0$  (punkt główny strefy),  
parametr numeryczny skalujący:  $c = 3.0 \cdot 10^{-6}$

$a_{00} = -20.0000$	Maksymalny wpływ	$b_{01} = -40467.0078$	Oszacowanie
$a_{20} = 68.2052$	wyrazu szeregu na	$b_{11} = -3440.9144$	reszty szeregu
$a_{02} = 68.2052$	zniekształcenie $\sigma$ dla	$b_{21} = -245.7226$	5-rzędu
	skrajnych obszarów strefy	$b_{03} = 81.9102$	dla skrajnych
$a_{12} = -0.0941$	..... $\Delta\sigma < 1$ mm/10 km	$b_{31} = -17.9680$	obszarów strefy:
		$b_{13} = 18.0686$	
		$b_{41} = -1.2983$	]
		$b_{23} = 2.5818$	$\Delta\gamma < 0.02^{\text{cc}}$
		$b_{05} = -0.2463$	]

**STREFA 2**  $X_0 = 5806000.0$   $Y_0 = 4603000.0$   $c = 3.0 \cdot 10^{-6}$

$a_{00} = -20.0000$		$b_{01} = -44068.8494$	
$a_{20} = 68.1683$		$b_{11} = -3918.7169$	
$a_{02} = 68.1683$		$b_{21} = -300.7324$	
$a_{12} = -0.0921$	..... $\Delta\sigma < 1$ mm/10 km	$b_{03} = 100.2353$	
		$b_{31} = -23.4666$	
		$b_{13} = 23.5581$	
		$b_{41} = -1.8983$	]
		$b_{23} = 3.7848$	$\Delta\gamma < 0.02^{\text{cc}}$
		$b_{05} = -0.3679$	]

**STREFA 3**  $X_0 = 5999000.0$   $Y_0 = 3501000.0$   $c = 3.0 \cdot 10^{-6}$

$a_{00} = -20.0000$		$b_{01} = -45010.5188$	
$a_{20} = 68.1593$		$b_{11} = -4050.3661$	
$a_{02} = 68.1593$		$b_{21} = -316.4656$	
$a_{12} = -0.0915$	..... $\Delta\sigma < 1$ mm/10 km	$b_{03} = 105.4885$	
		$b_{31} = -25.0869$	
		$b_{13} = 25.1755$	
		$b_{41} = -1.9742$	]
		$b_{23} = 3.9454$	$\Delta\gamma < 0.02^{\text{cc}}$
		$b_{05} = -0.3860$	]

**STREFA 4**  $X_0 = 5627000.0$   $Y_0 = 3703000.0$   $c = 3.0 \cdot 10^{-6}$ 

$a_{00} = -20.0000$	$b_{01} = -42005.1782$
$a_{20} = 68.1888$	$b_{11} = -3639.9597$
$a_{02} = 68.1888$	$b_{21} = -268.2202$
$a_{12} = -0.0932$ ..... $\Delta\sigma < 1$ mm/10 km	$b_{03} = 89.4104$
	$b_{31} = -20.1865$
	$b_{13} = 20.2616$
	$b_{41} = -1.4895$ ]
	$b_{23} = 2.9674$ $\Delta\gamma < 0.02^{\text{cc}}$
	$b_{05} = -0.2875$ ]

**STREFA 5** parametry centrujące:  $X_0 = 850000.0$   $Y_0 = 237000.0$  (punkt na południku środkowym strefy)parametr numeryczny skalujący:  $c = 4.0 \cdot 10^{-6}$ 

$a_{00} = -1.70000$ Wpływ wyrazu szeregu	$b_{01} = -29766.1533$ Wpływ wyrazów
$a_{02} = 76.72646$ na skraju strefy:	$b_{11} = -2368.6915$ szeregu na skraju
$a_{12} = -0.03981$ .... $\Delta\sigma < 0.001$ mm/10km	$b_{21} = -110.4977$ strefy:
	$b_{03} = 36.8316$
	$b_{31} = -6.3846$ ]
	$b_{13} = 6.3937$ ] $\Delta\gamma < 0.005^{\text{cc}}$
	$b_{41} = -0.3632$ ]
	$b_{23} = 0.7245$ $\Delta\gamma < 0.0002^{\text{cc}}$
	$b_{05} = -0.0688$ ]

**GUGIK-80** parametry centrujące:  $X_0 = 500000.0$   $Y_0 = 500000.0$  (punkt główny strefy)parametr numeryczny skalujący:  $c = 2.0 \cdot 10^{-6}$ 

$a_{00} = -28.5714$	$b_{01} = -64144.6645$
$a_{20} = 153.4208$	$b_{11} = -8417.0725$
$a_{02} = 153.4208$	$b_{21} = -944.5332$
$a_{12} = -0.3135$ ..... $\Delta\sigma < 7$ mm/10 km	$b_{03} = 314.8464$
$a_{22} = 0.0065$ ..... $\Delta\sigma < 0.01$ mm/10 km	$b_{31} = -108.2059$
	$b_{13} = 108.2003$
	$b_{41} = -12.3462$ ]
	$b_{23} = 24.6920$ $\Delta\gamma < 1^{\text{cc}}$
	$b_{05} = -2.4706$ ]
	$b_{51} = -1.3811$ ]
	$b_{33} = 4.7185$ $\Delta\gamma < 0.1^{\text{cc}}$
	$b_{15} = -1.4494$ ]
	$b_{61} = -0.1578$ ]
	$b_{43} = 0.7907$ $\Delta\gamma < 0.01^{\text{cc}}$
	$b_{25} = -0.4581$ ]

### SYNTEZA WZORÓW

$$u = (X - X_0) \cdot c, \quad v = (Y - Y_0) \cdot c \quad (\text{scentrowane i unormowane argumenty})$$

$$\sigma = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot u^i \cdot v^j \quad (\text{elementarne zniekształcenie liniowe}) \quad \gamma = -10^{-4} \cdot \sum_{i,j} b_{ij} \cdot u^i \cdot v^j \quad (\text{konwergencja})$$

[cm/km] [<sup>g</sup>]

**Uwagi:**

- Przyjmujemy  $a_{ij} = 0$  lub  $b_{ij} = 0$ , jeśli odpowiedni współczynnik nie występuje w wykazie współczynników danej strefy.
- Mnożnik  $10^{-4}$  powoduje wyrażenie konwergencji w gradach.
- Wartości  $X_0, Y_0$  pokrywają się z danymi w tabelicy 4, ale za wyjątkiem strefy 5.
- Przy zastosowaniu powyższych formuł i współczynników w obszarze stref błędy numeryczne nie przekraczają wartości:  $|e_\sigma| < 0.0002$  cm/km,  $|e_\gamma| < 0.004$  [<sup>cc</sup>].

Analogicznym wzorem wielomianowym wyrażają się konwergencje południków:

$$\gamma = - \sum_{i,j} b_{ij} \cdot u^i \cdot v^j \quad (6.16)$$

Współczynniki  $b_{ij}$  są podane w prawej kolumnie tabeli 6.5, pozostałe oznaczenia jak we wzorach (6.13) - (6.15). Informacje podane w tabeli 6.5 ukazują równocześnie, które wyrazy szeregu (6.16) mogą mieć istotne znaczenie dla danych prac geodezyjnych.

#### 6.8. Składowe pola zniekształceń w układzie „1965” wyrażone za pomocą wzorów analitycznych

Dla strefy 5 układu „1965”, gdzie zastosowano odwzorowanie *Gaussa-Krügera* w pełni adekwatne są wszystkie wzory tego odwzorowania podane w rozdziale 5, a więc również obejmujące obliczanie składowych pola zniekształceń za pomocą wzorów analitycznych. Dla stref 1-4 wykorzystujemy natomiast przyjęte formuły odwzorowawcze w wariantach A, B lub C.

Dla wariantu A wykorzystujemy zasadę, że odwzorowanie quasi-stereograficzne jest tworzone poprzez przekształcenie odwzorowania *Gaussa-Krügera*. Wobec powyższego zgodnie z zasadą składania przekształceń wiernokątnych, składowe pola zniekształceń możemy wyrazić w myśl (5.16) i (5.17) wzorami ogólnymi:

$$m_{65} = m_{GK} \cdot m_{GK-65} \quad (6.17)$$

(wskaźniki określają genezę skali elementarnej),

$$\gamma = \gamma_{GK} + \gamma_{GK-65} \quad (6.18)$$

## TEST NUMERYCZNY ALGORYTMÓW UKŁADU „1965”

**Dane: (B, L) (na elipsoidzie Krasowskiego) w obszarze strefy 1 (1965)**

Nr	B			L		
1	50	11	21	20	11	22
2	52	21	32	20	12	23
3	50	23	44	23	14	37
4	52	16	50	23	44	16

**Współrzędne w układzie „1965” obliczone za pomocą algorytmu A:**

Nr	x	y	$\sigma$ [cm/km]	$\gamma$ [g]
1	5418911.555340	4573175.573717	-16.0794	-0.76537147
2	5660245.639672	4577254.297153	5.1128	-0.76256552
3	5443715.969965	4790566.413080	-5.1897	+1.85250558
4	5654453.631881	4818137.581164	21.6952	+2.30709510

**Współrzędne w układzie „1965” obliczone za pomocą algorytmu B (zgodność z wariantem A w zakresie podanej ilości cyfr):**

1	5418911.555340	4573175.573717	-16.0794	-0.76537147
2	5660245.639672	4577254.297153	5.1128	-0.76256552
3	5443715.969965	4790566.413080	-5.1897	+1.85250558
4	5654453.631881	4818137.581164	21.6952	+2.30709510

**Zadanie odwrotne za pomocą algorytmu A (zgodność z danymi do 0.00000005 ”):**

1	50	11	21.0000000	20	11	22.0000000
2	52	21	32.0000000	20	12	23.0000000
3	50	23	44.0000000	23	14	37.0000000
4	52	16	50.0000000	23	44	16.0000000

**Zadanie odwrotne za pomocą algorytmu B (zgodność z A w zakresie zapisanej ilości cyfr):**

1	50	11	21.0000000	20	11	22.0000000
2	52	21	32.0000000	20	12	23.0000000
3	50	23	44.0000000	23	14	37.0000000
4	52	16	50.0000000	23	44	16.0000000

### Uwagi i objaśnienia:

- Elementy pola deformacji:  $\sigma$  - elementarne zniekształcenie długości [cm/km],  $\gamma$  - zbieżność południków (w gradach).
- Błąd numeryczny współrzędnych płaskich nie przekracza  $10^{-6}$  m. Błąd numeryczny współrzędnych geodezyjnych po transformacji odwrotnej nie przekracza  $10^{-7}$  [“].

przy czym:  $m_{GK}$ ,  $\gamma_{GK}$  to składowe pola wyznaczone w odwzorowaniu *Gaussa-Krügera*, z którego tworzy się odwzorowanie quasi-stereograficzne, natomiast  $m_{GK-65}$ ,  $\gamma_{GK-65}$  oznaczają odpowiednie elementy aktualizacyjne po przejściu do odwzorowania quasi-stereograficznego.

Wyznaczenie tych wartości wiąże się zatem z ostatecznym określeniem parametrów dla układu „1965”. W tym celu wystarczy wykorzystać związek (6.5), jaki zachodzi pomiędzy odwzorowaniem *Gaussa-Krügera* a odwzorowaniem quasi-stereograficznym w dziedzinie zespolonej, a następnie wzory (5.13) - (5.15). Wstawmy najpierw zależności (6.5a), (6.5b) do (6.5). Odpowiednio do ogólnej postaci przekształcenia (5.12) otrzymamy:

$$\mathbf{Z} = 2 \cdot R_s \cdot m_0 \cdot \operatorname{tg}(w); \quad \mathbf{w} = \mathbf{z} / (2 \cdot R_s), \quad \mathbf{z} = (x_{GK} - s_0, y_{GK}) \quad (6.19)$$

( $s_0$  - długość łuku południka od równika do punktu głównego danej strefy,  $R_s$  - średni promień krzywizny elipsoidy w punkcie głównym strefy,  $m_0$  - skala w punkcie głównym). Biorąc teraz *taylorowskie* rozwinięcie **tangensa** zespolonego w postaci (6.7), wyznaczmy, według (5.13), gradient (jako wielkość zespoloną):

$$\begin{aligned} d\mathbf{Z} / d\mathbf{z} &= (f_X, f_Y) = m_0 \cdot [1 / \cos^2(w)] = \\ &= m_0 \cdot [(a_1, 0) + 3 \cdot a_3 \cdot \mathbf{w}^2 + 5 \cdot a_5 \cdot \mathbf{w}^4 + 7 \cdot a_7 \cdot \mathbf{w}^6 + 9 \cdot a_9 \cdot \mathbf{w}^8] = \\ &= m_0 \cdot [(a_1, 0) + \mathbf{w}^2 \cdot (3 \cdot a_3 + \mathbf{w}^2 \cdot (5 \cdot a_5 + \mathbf{w}^2 \cdot (7 \cdot a_7 + 9 \cdot a_9 \cdot \mathbf{w}^2)))] \quad (6.20) \end{aligned}$$

Składowe  $f_X$ ,  $f_Y$  otrzymujemy drogą podstawienia argumentu i wykonania operacji na liczbach zespolonych. W rezultacie szukane wartości składowych pola zniekształceń obliczamy według wzorów (5.14), (5.15). Dla użytych oznaczeń będzie:

$$m_{GK-65} = (f_X^2 + f_Y^2)^{1/2}, \quad \gamma_{GK-65} = -\operatorname{arc\,tg}(f_Y / f_X) = -\operatorname{arc\,sin}(f_Y / m_{GK-65}) \quad (6.21)$$

Podobne zasady stosujemy również dla wariantów B i C, w których składowe pola zniekształceń odwzorowania quasi-stereograficznego będą odniesione teraz do odwzorowania *Mercatora* (odwzorowanie walcowe-poprzeczne sfery *Lagrange'a* - dla wariantu B - oraz odwzorowanie walcowe - normalne tej sfery - dla wariantu C). Pomijamy je w dalszym ciągu, przyjmując, że przedstawione już rozwiązania dają wystarczające możliwości wyboru algorytmów i ich kontroli.

## 6.9. Poprawki odwzorowawcze obserwacji

[Dla wszystkich rodzajów odwzorowań aktualne pozostają empiryczne i interpolacyjne metody redukcji obserwacji oraz formuły na określenie elementarnej skali połowej lub odnośnych zniekształceń elementarnych, przedstawione w rozdziale 5. Niezależnie od tego, kierując się dotychczasowymi opracowaniami aplikacyjnymi układu „1965”, podajemy dla kompletu wzór na poprawkę odwzorowawczą kierunku, który opiera się na uproszczeniu, że izolinie zniekształceń liniowych są współśrodkowymi okręgami (to oznacza również, że we wzorze (6.13) przyjmujemy zerową wartość współczynnika  $a_{12}$ ).]

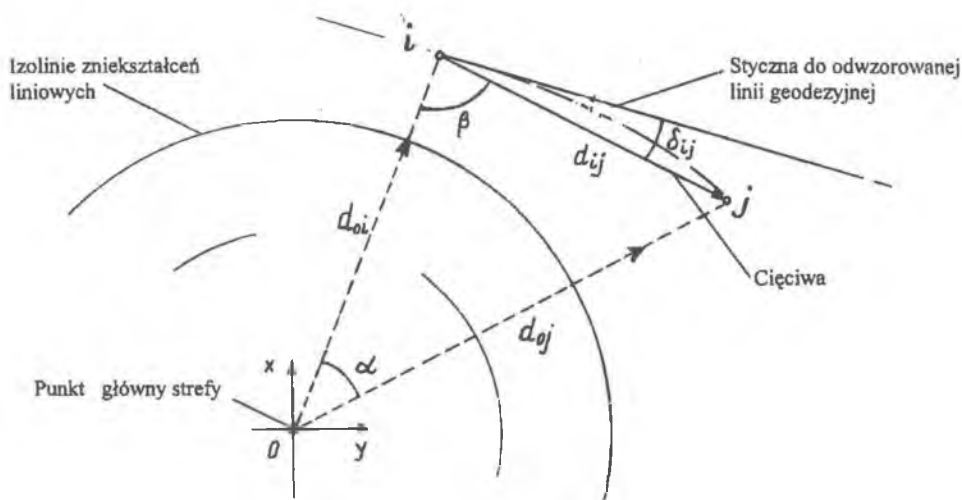
Zgodnie z sytuacją pokazaną na rys. 6.5, **poprawka odwzorowawcza kierunku** (kąt pomiędzy odwzorowaną linią geodezyjną a jej cięciwą) wyraża się wzorem:

$$\begin{aligned}
 \delta_{ij} [^{\text{cc}}] &= \rho^{\text{cc}} \cdot C_0^2 \cdot d_{oi} \cdot d_{oj} \cdot \sin(\alpha) \\
 &= \rho^{\text{cc}} \cdot C_0^2 \cdot [(Y_j - Y_o) \cdot (X_i - X_o) - (Y_i - Y_o) \cdot (X_j - X_o)] = \\
 &= \rho^{\text{cc}} \cdot C_0^2 \cdot [(Y_j - Y_i) \cdot (X_i - X_o) - (Y_i - Y_o) \cdot (X_j - X_i)] = \\
 &= \rho^{\text{cc}} \cdot C_0^2 \cdot d_{oi} \cdot d_{ij} \cdot \sin(\beta)
 \end{aligned}
 \tag{6.22}$$

$$(\rho^{\text{cc}} = 636619.772)$$

gdzie:

$C_0 = 1 / (2 \cdot m_0 \cdot R_s)$  (stała charakterystyczna dla każdej strefy układu „1965”),  
 $m_0$ ,  $R_s$  - skala i średni promień krzywizny elipsoidy w punkcie głównym odwzorowania quasi-stereograficznego (wielkości podane w tablicy 6.1),  
 $(X_i, Y_i)$ ,  $(X_j, Y_j)$  - współrzędne płaskie pary punktów geodezyjnych,  
 $(X_o, Y_o)$  - współrzędne punktu głównego strefy odwzorowawczej,  
 $d_{oi}$ ,  $d_{oj}$ ,  $d_{ij}$ , - długości wektorów  $(o, i)$ ,  $(o, j)$ ,  $(i, j)$ ,  
 $\alpha$ ,  $\beta$  - kąty między wektorami jak na rys. 6.5.



Rys. 6.5. Poprawka odwzorowawcza kierunku w odwzorowaniu quasi-stereograficznym

Jak widać z postaci wzoru (6.22), wielkość redukcji jest wprost proporcjonalna do długości wektora obserwacyjnego  $d_{ij}$ , odległości od punktu głównego strefy  $d_{oi}$  i sinusa kąta ( $\beta$ ), jaki tworzy wektor obserwacji z wektorem wodzącym punktu (stanowiska) względem punktu głównego strefy. Dla kierunków obserwacji równoległych do wektora wodzącego ( $\beta \rightarrow 0$ ) wartość redukcji zmierza do 0. Maksymalne wartości osiąga natomiast dla kierunków obserwacji prostopadłych do wektora wodzącego ( $\beta \rightarrow 90^\circ$ ).

Poprawkę odwzorowawczą kierunku dodajemy algebraicznie do miary kierunku lub azymutu (przy redukcji azymutów uwzględniamy także zbieżność południków).

**Poprawka odwzorowawcza kąta** wynika z różnicy poprawek odwzorowawczych

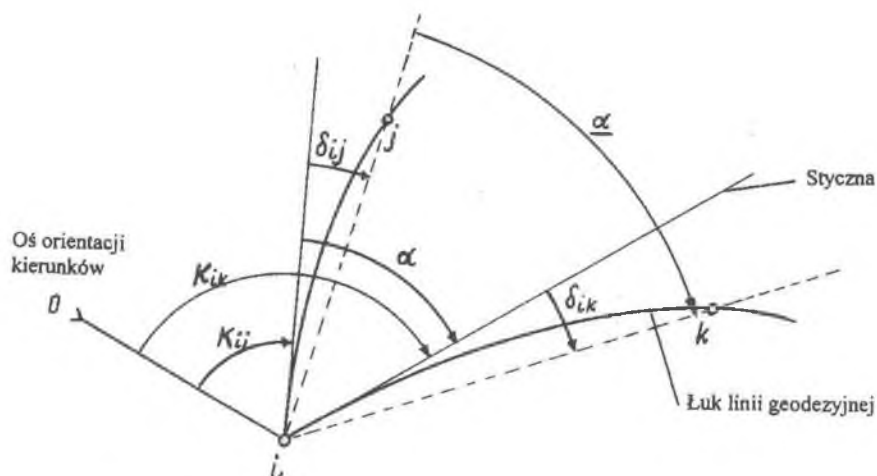


kierunków: Jeśli  $\alpha = K_{ik} - K_{ij}$  (rys. 6.6) jest kątem zredukowanym na elipsoidę odniesienia, obliczonym jako różnica kierunków lub azymutów linii geodezyjnych,  $\delta_{ik}, \delta_{ij}$  są poprawkami odwzorowawczymi odpowiednich kierunków, to

$$\underline{\alpha} = (K_{ik} + \delta_{ik}) - (K_{ij} + \delta_{ij}) = (K_{ik} - K_{ij}) + (\delta_{ik} - \delta_{ij}) = \alpha + \Delta\alpha \quad (6.23)$$

gdzie  $\Delta\alpha = \delta_{ik} - \delta_{ij}$

jest odpowiednim kątem zredukowanym na płaszczyźnie (mierzonym między cięciwami).



Rys. 6.6. Redukcja odwzorowawcza kąta

### TEST KONTROLNY WZORÓW NA REDUKCJĘ KĄTA

W strefie 1 układu „1965” przyjęto współrzędne 3 punktów odległych wzajemnie o ok. 30 km. Wyznaczono miarę kąta (2,1,3) na elipsoidzie z różnicy azymutów linii geodezyjnych, a następnie obliczono miarę kąta na płaszczyźnie odwzorowania według wzoru (6.23). Dla porównania obliczono również dokładną miarę kąta na płaszczyźnie, posługując się współrzędnymi X, Y:

Nr	B	L	Kąt na elipsoidzie	wg (6.23)	ze współrzędnych	różnica
1	52° 00' 00"	22° 00' 00"	129.5909527 <sup>9</sup>	129.5923744	129.5923732	0.012 [°]
2	52° 15' 00"	22° 15' 00"				
3	52° 45' 00"	22° 15' 00"				

Przyjęte dane dotyczą pewnych warunków ekstremalnych, zatem wynik testu w pełni potwierdza wystarczającą precyzję wzoru (6.22).

## 7. Empiryczny układ „1965” (rozszerzenie operacji 4)

### [Definicje i komentarze wstępne:

• Wzory podane w rozdziale 6 definiują **matematyczny układ „1965”**, czyli wynikający z teorii przyjętych odwzorowań (quasi-sterograficznego, Gaussa-Krügera). Pojęcie **empirycznego układu „1965”** wiąże się natomiast z faktyczną realizacją tego układu poprzez wyznaczone z pewnym błędem współrzędne punktów osnów geodezyjnych. Na to jednak, by stwierdzić, jak dokładnie został zrealizowany układ „1965”, musielibyśmy dysponować dla porównania bezbłędnymi wartościami współrzędnych tych samych punktów. Obecnie przyjmujemy jako najbardziej adekwatną podstawę do takich ocen porównawczych - system ETRF-89 zrealizowany już w Polsce poprzez sieć POLREF o wysokiej, subcentymetrowej precyzji, wynikającej z zastosowanej techniki obserwacyjnej GPS oraz nawiązane do niej punkty sieci I i II klasy, które poprzednio wyznaczone były w układzie „1965”. Tym samym, przynajmniej w zakresie sieci geodezyjnych wyższych rzędów, dysponujemy odpowiadającymi sobie, w obu systemach elipsoidalnych (GRS-80, KRASOWSKI) i odwzorowawczych, zbiorami współrzędnych tych samych punktów. Stosując zatem opisane wcześniej przekształcenia teoretyczne nowych współrzędnych z układu ETRF-89 do układu „1965” i porównując je z posiadanymi już współrzędnymi archiwalnymi w tym układzie, otrzymamy odchyłki, które obrazują odstępstwa faktycznie zrealizowanego (empirycznego) układu „1965” od jego znacznie dokładniejszego odpowiednika. Jak wynika z przeprowadzonych badań statystycznych, odstępstwa te można rozdzielić na takie, które mają charakter **globalny** (dla całej strefy układu „1965”) oraz pozostałe, wynikające z **lokalnej** deformacji empirycznego układu „1965”. Odstępstwa w sensie globalnym (strefowe) można opisać w formie 4-parametrowej transformacji Helmerta (przekształcenie przez podobieństwo obejmujące pewne niewielkie przemieszczenie lub (i) zmianę skali układu strefy) lub (zwłaszcza w strefach 1-4) za pomocą wielomianowych transformacji wiernokątnych wyższych stopni. Parametry takich transformacji (dla każdej strefy układu „1965”) można wyznaczyć na przykład w oparciu o wszystkie (z danej strefy) punkty I klasy. W ten sposób, poprzez użycie dodatkowych formuł transformacyjnych (korekcyjnych), współrzędne matematyczne „zblizymy” do ich odpowiedników empirycznych. Powstały układ nazywamy umownie **skorygowanym układem „1965”**. Pozostające jeszcze różnice pomiędzy układem empirycznym wynikają z deformacji lokalnych. Chcąc zbliżyć się jeszcze bardziej do układu empirycznego, należałoby zastosować analogiczną transformację korekcyjną (np. transformację *Helmerta*) tylko w oparciu o wybrane lokalne punkty dostosowania.

• Mówiąc o przekształceniach (transformacjach) teoretycznych, musimy jednak zastrzec, że nie dotyczą one w pełni wszystkich przejść transformacyjnych, jakie podano na rysunku 2.1. Chodzi tu mianowicie o przejście pomiędzy układami centrycznymi-kartezjańskimi elipsoidy GRS-80 i elipsoidy KRASOWSKIEGO, do czego odpowiednie parametry transformacji (por. rozdział 3) wyznaczono w istocie metodą empiryczną (w oparciu o punkty POLREF ).

• Układ „1965”, z uwagi na jego znaczny zasób archiwalny (mapy zasadnicze), musi jeszcze przez pewien okres czasu wypełniać swoją funkcję dla gospodarki narodowej, zatem istotne stają się relacje pomiędzy nim a nowym systemem odniesień przestrzennych, w którym opracowuje się na przykład sieci GPS. Oprócz samych formuł matematycznych interesować nas będzie również możliwość jak najlepszego wpasowania się w istniejący układ empiryczny „1965” (tzn. przy zachowaniu jego postaci archiwalnej). Kwestia ta może być związana, na przykład, z doraźną potrzebą aktualizacji istniejącej mapy zasadniczej w układzie „1965”. Częściej będziemy mieć już jednak do czynienia z zadaniem odwrotnym, kiedy mapy w układzie „1965”, będą przetwarzane do nowego układu współrzędnych „2000”. W problematyce powyższej wyróżnimy kilka wariantów sytuacyjnych, związanych z celem zadania i rodzajem posiadanych informacji.]

7.1. Przy przeliczaniu współrzędnych z układu odwzorowawczego elipsoidy GRS-80 (na przykład z układu „1992” lub ETRF-89) do układu empirycznego „1965” (przyjmujemy stosowne oznaczenia: 1965(mat), 1965(empir)) wyróżnia się dwa następujące etapy:

- a) Zasadnicze przeliczenie matematyczne według ścisłych formuł odwzorowań i określonej w rozdziale 3 transformacji przestrzennej pomiędzy dwoma systemami elipsoidalnymi:

$$1992 \Rightarrow \text{transformacje matematyczne} \Rightarrow 1965(\text{mat}) \quad (7.1)$$

- b) Dodatkowa (globalna lub/i lokalna) transformacja korekcyjna, wynikająca z wejścia do empirycznego układu „1965”:

$$1965(\text{mat}) \Rightarrow 1965(\text{empir}) \quad (7.2)$$

[Rozwinięcie szczegółowe dla różnych uwarunkowań sytuacyjnych jest przedmiotem dalszej części niniejszego rozdziału]

7.2. Przy przeliczaniu współrzędnych z empirycznego układu „1965” do układu „1992” (lub ogólniej ETRF-89) możliwe są dwa warianty postępowania:

#### Wariant I:

- a) Odwrócenie transformacji korekcyjnej (7.2), czyli wykonanie przekształcenia

$$1965(\text{empir}) \Rightarrow \mathbf{xy}1965(\text{mat}) \quad (7.3)$$

- b) Odwrócenie przekształcenia (7.1), czyli:

$$1965(\text{mat}) \Rightarrow \text{transformacje matematyczne} \Rightarrow 1992 \quad (7.4)$$

#### Wariant II:

- a) Matematyczne przekształcenie współrzędnych empirycznych na układ „1992” (do systemu ETRF-89):

$$1965(\text{empir}) \Rightarrow \text{transformacje matematyczne} \Rightarrow \sim 1992 \quad (7.5)$$

(znaczek ~ przy współrzędnych „1992” wskazuje na niewyeliminowany wcześniej błąd).

- b) Transformacja korekcyjna w oparciu o punkty dostosowania na poziomie układu „1992”

$$\sim 1992 \Rightarrow 1992 \quad (7.6)$$

[Wariant I jest możliwy do realizacji, na przykład, jeśli współrzędne punktów dostosowania w układzie „1992” zostaną „sprowadzone” poprzez przekształcenie matematyczne na płaszczyznę układu „1965” lub jeśli stosowna transformacja korekcyjna (7.3), eliminująca

błądność empiryczną współrzędnych „1965” ma charakter tylko globalny, a parametry transformacji dla całej strefy są znane z odrębnych wyznaczeń. Wariant II jest adekwatny do zastosowania w każdej sytuacji praktycznej, w której korektę wykonuje się w oparciu o lokalne zbiory punktów dostosowania.]

**7.4. Lokalne transformacje korekcyjne** powinny być zasadniczo **transformacjami Helmerta (przez podobieństwo)**, przy czym - w zależności od konkretnych warunków sytuacyjnych - zalecona jest dodatkowa **korekta posttransformacyjna Hausbrandta**, prowadząca do wyrównania otrzymanych odchyłek współrzędnych na punktach dostosowania i odpowiedniego skorygowania współrzędnych wszystkich punktów transformowanych. Warunki zastosowania transformacji *Helmerta* i korekt posttransformacyjnych w konkretnych sytuacjach praktycznych będą omówione w kolejnych punktach niniejszego rozdziału. Obecnie podajemy ogólne wzory tych operacji:

#### 7.4.1. Transformacja *Helmerta* (przez podobieństwo)

W pierwszym etapie wyznaczamy współczynniki transformacji w oparciu o współrzędne punktów dostosowania. Niech  $\{ (x_i, y_i) : i = 1, 2, \dots, n \}$ ,  $\{ (X_i, Y_i) : i = 1, 2, \dots, n \}$  oznaczają dane zbiory współrzędnych tych punktów w odpowiednich układach: pierwotnym i wtórnym,  $n$  - liczba punktów dostosowania. Zakładamy dla uproszczenia, że uporządkowanie wskaźników punktów jest w obu zbiorach identyczne. Obliczamy najpierw współrzędne środków ciężkości zbiorów punktów w obu układach:

$$x_o = (\sum x_i)/n, y_o = (\sum y_i)/n, X_o = (\sum X_i)/n, Y_o = (\sum Y_i)/n \quad (7.7)$$

(wszystkie sumowania po  $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Dokonujemy następnie centrowania współrzędnych (przesunięcia układów do środków ciężkości):

$$\underline{x}_i = x_i - x_o, \underline{y}_i = y_i - y_o, \underline{X}_i = X_i - X_o, \underline{Y}_i = Y_i - Y_o \quad (7.8)$$

dla wszystkich  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Szukane współczynniki transformacji wyrażają się wzorami:

$$C = W_1 / W, S = W_2 / W, \quad (7.9)$$

gdzie:

$$W = \sum_{i=1 \dots n} (\underline{x}_i^2 + \underline{y}_i^2), \quad (7.9a)$$

$$W_1 = \sum_{i=1 \dots n} (\underline{X}_i \cdot \underline{x}_i + \underline{Y}_i \cdot \underline{y}_i), \quad (7.9b)$$

$$W_2 = \sum_{i=1 \dots n} (\underline{X}_i \cdot \underline{y}_i - \underline{Y}_i \cdot \underline{x}_i). \quad (7.9c)$$

Teraz możemy już realizować transformację (przekształcenie współrzędnych z układu pierwotnego do wtórnego), stosując następujące wzory:

$$\begin{aligned} X' &= X_0 + C \cdot \underline{x} + S \cdot \underline{y} \\ Y' &= Y_0 + C \cdot \underline{y} - S \cdot \underline{x} \end{aligned} \quad (7.10)$$

gdzie:

$$\underline{x} = x - x_0, \quad \underline{y} = y - y_0$$

$x, y$  - współrzędne punktu w układzie pierwotnym,  
 $X', Y'$  - współrzędne punktu po transformacji (w układzie wtórnym).

Dla wszystkich punktów dostosowania obliczamy stosowne poprawki do współrzędnych danych (katalogowych) w układzie wtórnym:

$$V_{xi} = X_i - X_i', \quad V_{yi} = Y_i - Y_i' \quad (7.11)$$

( $i$  - wskaźnik punktu dostosowania), a w oparciu o nie - błąd transformacji:

$$\mu_t = [ \sum (V_{xi}^2 + V_{yi}^2) / (n - 2) ]^{1/2} \quad (7.12)$$

(ujemne wartości poprawek nazywamy też odchyłkami transformacji).

Odchyłki i błąd transformacji są podstawą do oceny poprawności współrzędnych punktów dostosowania. Jeśli współrzędne te nie są obciążone istotnymi błędami systematycznymi lub grubymi, to błąd transformacji nie powinien przekraczać wielkości dopuszczalnego błędu położenia punktu  $\mu_P$  w danej klasie sieci (przykładowo, jeśli punktami dostosowania są punkty II klasy państwowej, to błąd transformacji nie powinien przekraczać wartości  $\mu_P = 0.05$  m), natomiast wielkości odchyłek współrzędnych na punktach dostosowania nie powinny przekraczać wartości  $k \cdot \mu_P$ , gdzie  $k$  przyjmuje wielkość pomiędzy 2 i 3, zależnie od liczby punktów dostosowania lub szczególnych ograniczeń ujętych w warunkach technicznych roboty.

[Powyższe kryteria, w odniesieniu do problematyki niniejszego rozdziału, dotyczą jednak tylko przypadku, gdy transformacja *Helmerta* jest użyta jako lokalna transformacja korekcyjna, nie zaś jako transformacja globalna, obejmująca obszar całej strefy. Problematyka globalnej transformacji korekcyjnej dla danej strefy układu „1965” mogłaby mieć znaczenie tylko w przypadku modernizacji osnowy II klasy, obejmującej znaczny obszar strefy. Taką ewentualność pozostawiamy jednak dla specjalnych warunków naukowo-technicznych. Aktualne projekty modernizacji osnow będą zmierzać raczej do rozszerzenia systemu ETRF-89 i w tym kontekście traktujemy układ „1965” przede wszystkim jako bazę archiwalną, podlegającą tylko czasowym (doraźnym) modernizacjom wynikającym z potrzeby bieżącego jej wykorzystania dla celów gospodarczych.]

Współczynniki transformacji  $C, S$  mają następującą interpretację:

$$C = m \cdot \cos(\alpha), \quad S = m \cdot \sin(\alpha), \quad (7.13)$$

gdzie:

$$m = (C^2 + S^2)^{1/2} - \text{współczynnik zmiany skali przekształcenia} \quad (7.14)$$

$\alpha$  - kąt skręcenia osi układu współrzędnych, ( $\text{tg } \alpha = s/c$ ).

[Przy zastosowaniu transformacji *Helmerta* jako transformacji korekcyjnej, kąt skręcenia  $\alpha$  będzie na ogół kątem na tyle małym, że słuszne staje się uproszczenie  $\cos(\alpha) \approx 1$  oraz  $\sin(\alpha) \approx \alpha$  przenoszone odpowiednio na wzory transformacyjne.]

Jednym z elementów kontrolnych transformacji *Helmerta* (można to zastosować na etapie testowania procedur komputerowych) jest sprawdzenie równości miar kątów obliczanych raz ze współrzędnymi pierwotnymi i drugi raz ze współrzędnymi po transformacji (7.10). Odpowiadające miary długości powinny natomiast spełniać proporcje stosownie do skali  $m$ .

#### 7.4.2. Korekta posttransformacyjna Hausbrandta

Współrzędne otrzymane z transformacji według wzorów (7.10) nie muszą się pokrywać z analogicznymi współrzędnymi punktów dostosowania, które jako wielkości dane służyły do wyznaczenia współczynników (parametrów) transformacji. O rozbieżnościach w tym zakresie świadczą wielkości poprawek, obliczane według wzorów (7.11). Aby nie powodować zmian w dotychczasowych współrzędnych (jako danych archiwalnych) *prof. Hausbrandt\** zaproponował pewnego rodzaju dodatkowe „uzgodnienie” współrzędnych, zwane tu korektą posttransformacyjną. Polega ona na tym, że współrzędne punktów dostosowania w układzie wtórnym pozostawia się w takiej postaci, w jakiej były przyjęte do transformacji (można powiedzieć inaczej, że do współrzędnych transformowanych (7.10) dodaje się wartości poprawek (7.11), powracając do wartości współrzędnych katalogowych), natomiast wszystkim pozostałym punktom transformowanym przyporządkowuje się poprawki wyznaczone przy zastosowaniu specjalnych wzorów interpolacyjnych.

$$V_{xj} = \frac{\sum [V_{xi} \cdot (1/d_{ij}^2)]}{\sum (1/d_{ij}^2)}, \quad V_{yj} = \frac{\sum [V_{yi} \cdot (1/d_{ij}^2)]}{\sum (1/d_{ij}^2)} \quad (7.15)$$

(sumowania po  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j$  - wskaźnik punktu transformowanego)

W ten sposób następuje świadome deformowanie wyników transformacji *Helmerta*, jakkolwiek ma ono pewne cechy regularności.

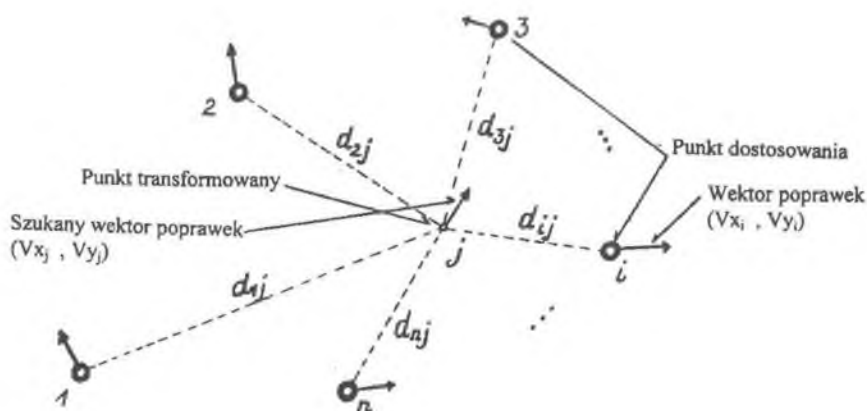
Jak widać, przedstawione wzory są podobne do wzorów na obliczanie średnich ważonych, gdy wagi są odwrotnościami kwadratów odległości danego punktu o wskaźniku  $j$  (w zbiorze wszystkich punktów transformowanych) od punktu dostosowania o wskaźniku  $i$  (w zbiorze punktów dostosowania). Ilustruje to przykładowo rys. 7.1. Długości  $d_{ij}$  obliczamy na podstawie współrzędnych pierwotnych. Wielkości poprawek (7.15) dodajemy do współrzędnych po transformacji, czyli do współrzędnych wyznaczonych za pomocą wzorów (7.10).

[Uwaga dotycząca algorytmu obliczeniowego: W przypadku, gdy punkt transformowany jest identyczny z pewnym punktem dostosowania, wówczas formalnie odległość  $d_{ij} = 0$ . Celem uniknięcia przypadku nieokreśloności wagi  $(1/d_{ij}^2)$  możemy „obowiązkowo” do każdej obliczanej długości dodawać małą liczbę dodatnią, np. 0.00001 m, która nie będzie mieć istotnego wpływu na interpolowane wartości poprawek i stanowi tylko numeryczny parametr

---

\*) *Hausbrandt S.*: Rachunki Geodezyjne (1953). N.Ed.: Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne. T. II. PPWK, Warszawa 1971.

regularyzacyjny. Otrzymana odpowiednio duża waga oznacza, że poprawki do współrzędnych danego punktu będą się praktycznie równać poprawkom odpowiedniego punktu dostosowania.]



Rys. 7.1. Ilustracja do zadania korekty *Hausbrandta*

**7.5. Podstawowym zbiorem danych** do przeprowadzania transformacji korekcyjnych (w sensie globalnym lub (i) lokalnym) są punkty osnow państwowych wyższych klas (rzędów) niż punkty przeliczane, posiadające współrzędne w obu układach, np. „2000” i „1965” (zbiory współrzędnych są dostępne w ośrodkach dokumentacji geodezyjnej i kartograficznej), przy czym w odniesieniu do interesującego nas **obiektu pomiaru (transformacji)** wyróżnimy w szczególności:

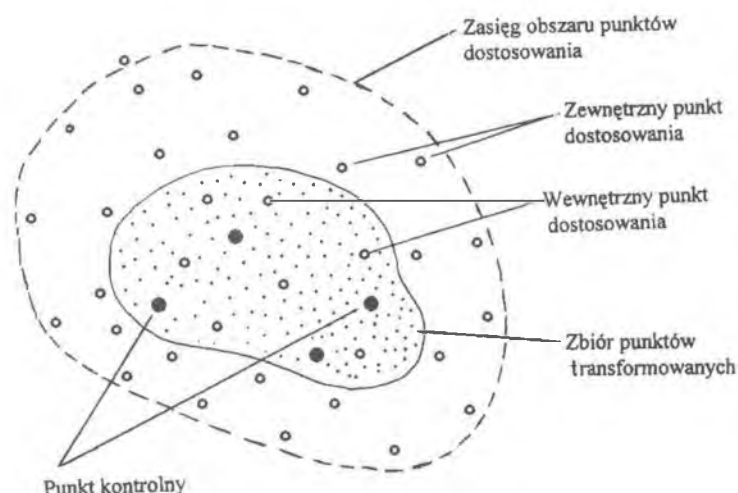
- **punkty zewnętrzne**, jeśli nie są to punkty powiązane obserwacyjnie (bezpośrednio) z obiektem pomiaru (transformacji),
- **punkty wewnętrzne**, jeśli wchodzi w skład punktów obiektu transformowanego (sieci). Sytuację ilustruje symbolicznie rys. 7.2.

**Punktami dostosowania (punktami łącznymi) transformacji** mogą być zarówno punkty zewnętrzne, jak też punkty wewnętrzne obiektu transformowanego. Podstawowym warunkiem na to, by punkt osnowy wyższego rzędu mógł być punktem dostosowania transformacji, jest to, by współrzędne punktu wyznaczone w obu interesujących nas układach (pierwotnym i wtórnym) odnosiły się do identycznego fizycznie znaku geodezyjnego. Taka sytuacja ma miejsce, na przykład, w odniesieniu do sieci I i II klasy. Praktycznie cały obszar kraju, z gęstością charakterystyczną dla punktów I i II klasy jest „pokryty” tymi punktami i są one tym samym dostępne do wykorzystania w omawianego typu zadaniach. Dla wszelkich nowych obiektów pomiarowych byłyby to więc punkty zewnętrzne. Zauważmy, że punkty takie brane jako punkty dostosowania transformacji nie muszą aktualnie fizycznie istnieć (mogły ulec zniszczeniu) lub mogły zmienić swoje położenie. Ważne jest tylko to, by ich współrzędne zarówno w układzie „1992”, jak też w układzie „1965” były wyznaczone w oparciu o ten sam zbiór obserwacyjny.

W podzbiorze punktów wewnętrznych wyróżnimy ponadto **punkty kontrolne**. Będą to punkty, które z racji prawdopodobnego przemieszczenia w stosunku do stanu pierwotnego nie mogą formalnie pełnić funkcji punktów dostosowania transformacji. Z taką sytuacją mamy do czynienia zwłaszcza na obszarze strefy 5, gdzie

podstawowymi punktami dostosowania powinny być punkty zewnętrzne, wyznaczone zarówno w układzie pierwotnym, jak też aktualnym w oparciu o te same zbiory obserwacyjne (są to punkty sieci I klasy), natomiast punkty wewnętrzne, nawet jeśli pozornie są tymi samymi punktami, powinny mieć zmienioną numerację i powinny być potraktowane jako punkty kontrolne. W wyniku obliczeń punkty kontrolne powinny otrzymać współrzędne aktualne.

[Konieczna liczebność oraz struktura punktów dostosowania i kontrolnych będzie przedmiotem kolejnych punktów niniejszego rozdziału.]



Rys. 7.2. Obiekt transformowany, zewnętrzne i wewnętrzne punkty dostosowania oraz punkty kontrolne

7.6. Dla poprawnego przeprowadzenia transformacji korekcyjnej (*Helmerta*) punkty dostosowania, obok tego, co zapisano w p. 7.4, powinny spełniać następujące warunki topologiczne i posttransformacyjne:

a) **Liczebność punktów dostosowania.** Niech  $k = 1, 2, 3, 4$  oznacza umowny wskaźnik klasy dokładnościowej punktów transformowanych, przy czym wskaźnik  $k = 1, 2, 3$  pokrywa się z odpowiednią klasą osnowy geodezyjnej (I, II lub III), zaś  $k = 4$  dotyczy osnowy pomiarowej. Liczebność  $n$  zbioru punktów dostosowania powinna czynić zadość nierówności:

$$n = n_1 + n_2 / 2 \geq 4 \quad (7.15)$$

gdzie  $n_1$  oznacza liczbę punktów dostosowania klasy o wskaźniku  $< k - 1$ , zaś  $n_2$  - liczbę punktów dostosowania klasy  $k - 1$ . Należy zaznaczyć, że w tej liczbie mogą się mieścić punkty zewnętrzne.

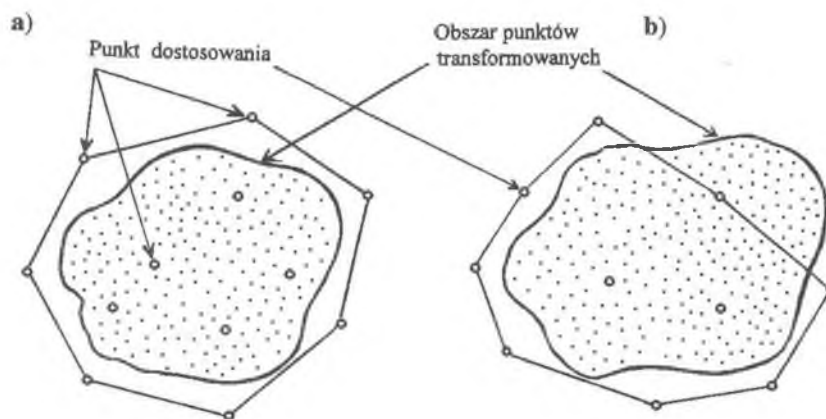
b) **Rozmieszczenie punktów dostosowania.** Składają się na to następujące warunki:

- *wszystkie punkty dostosowania powinny być rozmieszczone równomiernie w obszarze obejmującym obiekt transformowany i jego otoczenie (wielkość otoczenia jest praktycznie ograniczona zasięgiem strefy odwzorowawczej),*



- w zbiorze punktów dostosowania powinien istnieć taki ich podzbiór, który połączony ciągiem zamkniętym tworzy figurę zawierającą całkowicie punkty transformowane (rys. 7.3a ilustruje sytuację spełnienia tego warunku, zaś rysunek 7.3b - sytuację przeciwną).

c) **Dokładność wewnętrzna zbioru punktów dostosowania.** Punkty dostosowania, odpowiednio do klasy reprezentowanej osnowy, powinny spełniać kryteria posttransformacyjne w zakresie maksymalnych odchyłek i błędów transformacji, określone w p. 7.4.1. Powyższa uwaga dotyczy w zasadzie lokalnych transformacji korekcyjnych, obejmujących swym zasięgiem obszar wykraczający nie więcej niż 10 km poza obszar obiektu transformowanego. Jeśli dla określonego punktu dostosowania w takim obszarze odchyłki współrzędnych przekraczają wartości dopuszczalne określone w p. 7.4.1, należy po ewentualnej analizie przyczyn wykluczyć taki punkt ze zbioru punktów dostosowania. Pozostałe punkty wpasowania muszą jednak spełniać warunki a, b. Jeśli jest to punkt wewnętrzny, można w efekcie wyznaczyć jego nowe współrzędne. Włączenie takiego punktu do banku osnowy wymaga jednak spełnienia kryteriów wyznaczalności i dokładności danej klasy sieci. W istocie byłby to punkt klasy niższej niż dotychczas, czyli punkt w klasie punktów transformowanych, dla którego stwierdzono nieidentyczność z punktem dawnym, co wymaga interpretacji (błędne przestabilizowanie punktu, ruchy górotwórcze itp.).



Rys. 7.3. Rozmieszczenie punktów dostosowania a) prawidłowe, b) nieprawidłowe

**7.8. Wykonanie korekty posttransformacyjnej.** W wyniku wykonania transformacji korekcyjnej jako transformacji przez podobieństwo (*Helmerta*) współrzędne po transformacji (na poziomie układu „1965” lub „2000”) ulegają zmianie. Odchyłki na punktach dostosowania możemy jednak arbitralnie wyzerować, dokonując równocześnie dodatkowych korekt współrzędnych wszystkich punktów przez zastosowanie metody *prof. Hausbrandta*.

[Wyobraźmy sobie model fizyczny płaszczyzny rozciągliwej jak guma, na której są zaznaczone położenia punktów po transformacji Helmerta. Płaszczyznę tę naciągamy lub kurczymy lokalnie tak, aby punkty transformowane pokryły się z analogicznymi punktami „archiwalnymi” zaznaczonymi na płaszczyźnie sztywnej. Ta ostatnia operacja stanowi pewien analogon korekty posttransformacyjnej, po której następuje ostateczne ustalenie położenia wszystkich punktów transformowanych.]

Korekty tego rodzaju powodują zmianę kształtu pierwotnego układu punktów. Z reguły powinny być wykonywane przy przeliczeniu zbioru punktów charakteryzującego się niższą klasą dokładności niż zbiór punktów w układzie docelowym (np. przy przeliczaniu punktów archiwalnych z empirycznego układu „1965” do układu „1992”). W przypadku odwrotnym wykonanie takiej korekty będzie oznaczać pogarszanie jakościowe dotychczasowego zbioru punktów. Podajemy zatem konkluzje powyższych uwag:

**Korekta posttransformacyjna jest wskazana** zawsze w następujących sytuacjach:

- przy przekształcaniu punktów z empirycznego układu „1965” do układu „1992” lub „2000” (np. dla tworzenia nowych map numerycznych w oparciu o materiały archiwalne),
- przy przekształcaniu punktów z układu „1992” do układu „1965” (empir), jeśli stanowi to stosunkowo niewielkie, lokalne uzupełnienie istniejącej osnowy tej samej klasy, a istniejąca mapa zasadnicza w ujęciu tradycyjnym podlega jedynie doraźnej aktualizacji (nie tworzy się nowej mapy).

**Korekta nie jest wskazana** w następujących sytuacjach:

- Jeśli zakładana osnowa spełnia funkcję osnowy realizacyjnej inwestycji. Wszystkie punkty pełniące funkcję osnowy realizacyjnej powinny otrzymać nowy status numeryczny.

## 8. Przeliczenie wysokości elipsoidalnych na normalne lub odwrotnie (operacja 7a)

[Wzorem (2.2) wyraziliśmy już zależność pomiędzy wysokością elipsoidalną  $H$ , wysokością normalną  $H_n$  a odstępem  $s$  quasi-geoidy od elipsoidy odniesienia, zwanym też anomalią wysokości lub wzniesieniem quasi-geoidy nad elipsoidą. Znajomość odstępów  $s$  jako funkcji położenia  $s(B, L)$  pozwala oczywiście na dokonywanie wzajemnych przeliczeń  $H \Leftrightarrow H_n$ . Ma to istotne znaczenie, na przykład, przy opracowywaniu sieci GPS, gdzie otrzymuje się z pomiaru wysokości elipsoidalne (geometryczne). W Polsce przyjmowano dotychczas tzw. quasi-geoidę grawimetryczną pozyskiwaną (i wielokrotnie udokładnianą) głównie poprzez całkowanie anomalii grawimetrycznych oraz lokalne wygładzania metodami interpolacyjnymi (prace prof. A. Łyszkowicza w Centrum Badań Kosmicznych w Warszawie). Dokładność tego modelu quasi-geoidy charakteryzuje się kilkucentymetrowym błędem średnim (nie można jednak wykluczyć lokalnych błędów systematycznych). Obecnie opracowywany jest model quasi-geoidy oparty przede wszystkim na informacjach pochodzących z niwelacji geometrycznej i satelitarnej. Dlatego w dalszym ciągu, pomijając kwestię sposobu tworzenia modelu quasi-geoidy, będziemy używać przyjętej już oficjalnie nazwy: **geoida niwelacyjna**.]

Przy oprogramowaniu bazy danych GEOS w Centralnym Ośrodku Dokumentacji Geodezyjnej i Kartograficznej założono, że aktualnie (lub w przyszłości) obowiązujący model geoidy niwelacyjnej będzie reprezentowany m.in. dyskretną siatką punktów o rozdzielczości:  $\Delta B = 1'$ ,  $\Delta L = 1'$ , a informacje w tym zakresie będą dostępne dla użytkowników.

Niniejszy rozdział określa, w jaki sposób wykorzystywać dyskretną postać geoidy do interpolacji odstępów w punktach pośrednich. Dla niektórych prac geodezyjnych wystarczającą pod względem dokładności metodą dla określenia odstępów geoidy od elipsoidy może być również metoda wykorzystująca mapę izolinii odstępów wyznaczonych z krokiem 0.1 – 1m. Mapy tego rodzaju (docelowo w formie informatycznej) powinny być również dostępne do zastosowań.

### 8.1. Dyskretny, regularny model quasi-geoidy w obszarze Polski

Regularny model quasi-geoidy stanowi zbiór odstępów quasi-geoidy od elipsoidy określony w punktach siatki geograficzno-geodezyjnej (pokrywającej obszar Polski):

$$\{ (B_{ij}, L_{ij}) : B_{ij} = 49^\circ + i \cdot \Delta B \leq 55^\circ, L_{ij} = 14^\circ + j \cdot \Delta L \leq 24.2^\circ \} \quad (8.1)$$

( $\Delta B, \Delta L$  – przyjęte boki „oczek” siatki;  $i, j = 0, 1, 2, \dots$ )

Odstępy są określone jako funkcje współrzędnych geodezyjnych

$$s_{ij} = s(B_{ij}, L_{ij}).$$

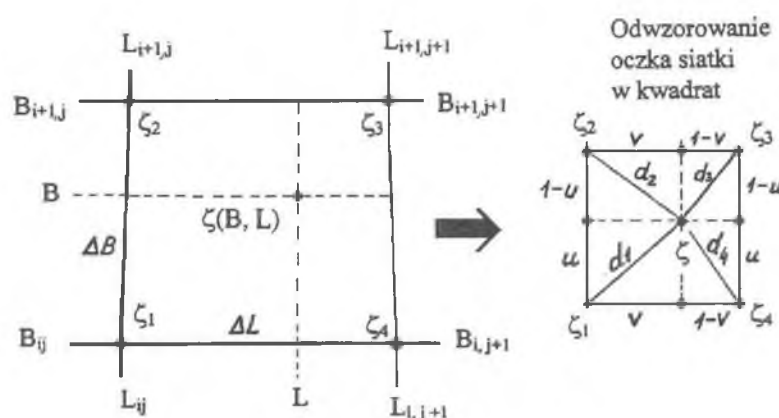
Model taki może być podstawą do interpolacji odstępów w dowolnych punktach pośrednich, pod warunkiem że pomiędzy sąsiednimi punktami siatki odstęp zmienia się „prawie” liniowo z błędem nieistotnym dla zastosowań lub w porównaniu z błędnością samego modelu quasi-geoidy (błąd standardowy ok. 0.01 - 0.03m). Analiza przyjętego obecnie w Polsce modelu grawimetrycznej quasi-geoidy

autorstwa *prof. A. Łyszkwicza* wykazuje, że wystarczającą dla zastosowań praktycznych byłaby siatka minutowa:  $\Delta B = 60''$ ,  $\Delta L = 60''$ . Dla siatki o takiej gęstości zostały wygenerowane wartości odstępów i zapisane w bazie danych GEOS - CODGiK.

## 8.2. Sposób interpolacji odstępów w punktach pośrednich

Rozpatrzmy sytuację podaną na rys. 8.1. Punkt interpolowany ( $B, L$ ) wypada w oczku siatki określonej w p. 8.1, dla którego:

$$(B_{ij} = B_{i,j+1}) \leq B < (B_{i+1,j} = B_{i+1,j+1}), (L_{ij} = L_{i+1,j}) \leq L < (L_{i,j+1} = L_{i+1,j+1}) \quad (8.2)$$



Rys. 8.1. Interpolacja w „oczku” siatki

Oznaczmy (zakładamy, że współrzędne są wyrażone w sekundach stopniowych):

$$u = (B - B_{ij})/\Delta B, v = (L - L_{ij})/\Delta L, \quad (8.3)$$

$$\underline{u} = 1 - u, \underline{v} = 1 - v \quad (u, v, \underline{u}, \underline{v} < 1)$$

Odstęp w punkcie ( $B, L$ ) obliczamy z następującego wzoru interpolacyjnego (tzw. interpolacji biliniowej):

$$\begin{aligned} s(B, L) &= s_1 \cdot (1 - u) \cdot (1 - v) + s_2 \cdot u \cdot (1 - v) + s_3 \cdot u \cdot v + s_4 \cdot (1 - u) \cdot v \\ &= s_1 \cdot \underline{u} \cdot \underline{v} + s_2 \cdot u \cdot \underline{v} + s_3 \cdot u \cdot v + s_4 \cdot \underline{u} \cdot v \end{aligned} \quad (8.4)$$

gdzie:

$$s_1 = s(B_{ij}, L_{ij}), s_2 = s(B_{i+1,j}, L_{i+1,j}), s_3 = s(B_{i+1,j+1}, L_{i+1,j+1}), s_4 = s(B_{i,j+1}, L_{i,j+1})$$

są danymi odstępami w punktach narożnych „oczka” siatki.

Alternatywnym do (8.4) jest wzór interpolacyjny stosowany w numerycznym modelu terenu, gdzie interpolowaną wartość określa się jako średnią ważoną (wagi odwrotnie proporcjonalne do kwadratów pseudoodległości danego punktu od naroży „oczka” siatki):

$$s'(B,L) = \frac{s_1/d_1^2 + s_2/d_2^2 + s_3/d_3^2 + s_4/d_4^2}{1/d_1^2 + 1/d_2^2 + 1/d_3^2 + 1/d_4^2} \quad (8.5)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} d_1 &= (u^2 + v^2)^{1/2} + e, \\ d_2 &= (\underline{u}^2 + v^2)^{1/2} + e \\ d_3 &= (u^2 + \underline{v}^2)^{1/2} + e \\ d_4 &= (u^2 + v^2)^{1/2} + e, \end{aligned} \quad (8.6)$$

oraz  $e = 0.00001$  – parametr numeryczny zabezpieczający przed zerowaniem się określonej pseudoodległości punktu od naroża siatki. Różnicę pomiędzy interpolacją (8.4) a (8.5) szacuje przybliżona nierówność:

$$|s' - s| < (1/10) \cdot \max \{ |s_i - s_j| : i,j = 1,2,3,4 \} \quad (8.7)$$

Prawa strona jest ułamkiem 1/10 z wartości maksymalnej różnicy odstępów określonych w narożach oczka siatki. Jeśli przykładowo, w narożach oczka siatki występują wartości odstępów różniące się maksymalnie o 0.1m, wtedy możemy się spodziewać, że rozbieżność pomiędzy wynikami wzorów (8.4) i (8.5) nie przekroczy ok. 10 mm. Zaleca się stosować jako podstawowy wzór (8.4) z uwagi na to, że stanowi on pewne „naturalne” rozszerzenie interpolacji liniowej. Wzór (8.5) może stanowić natomiast element kontrolny lub szacujący błąd interpolacji, z tytułu nieoznaczoności samego modelu matematycznego interpolacji.

### TEST WZORU INTERPOLACYJNEGO W ODNIESIENIU DO MODELU QUASI-GEOIDY (A. Łyszkowicza)

W oparciu o model quasi-geoidy realizowany programem Quasi97b (wersja grudzień 1998), autorstwa A. Łyszkowicza, wygenerowano odstępów w narożach „oczka” (siatki minutowej) w obszarze największej zmienności kształtu geoidy (w okolicach Tatr). Wyznaczono również tym samym programem odstępów w trzech punktach pośrednich. Podobne wartości uzyskano wzorami interpolacyjnymi. Wyniki numeryczne są następujące:

#### Dane współrzędne, modelowe wartości odstępów oraz wartości interpolowane:

	Nr	B	L	model $\zeta$ [m]	Interpolacja (8.4)	Interpolacja (8.5)
Naroża	1	49° 20' 00"	20° 00' 00"	41.811		
	2	49° 21' 00"	20° 00' 00"	41.706		
	3	49° 21' 00"	20° 01' 00"	41.680		
	4	49° 20' 00"	20° 01' 00"	41.786		
Punkty interpolowane	a	49° 20' 15"	20° 00' 15"	41.779	41.778	41.784
	b	49° 20' 45"	20° 00' 30"	41.719	41.719	41.722
	c	49° 20' 30"	20° 00' 45"	41.739	41.739	41.740

Jak widać, interpolacja według wzoru (8.4) praktycznie nie różni się od wyników modelowych. Przykład wybrany dla ekstremalnych warunków modelu geoidy potwierdza równocześnie, że siatka interpolacyjna o „oczku” minutowym w pełni wystarcza dla celów praktycznych jako dyskretny model quasi-geoidy.

## Literatura

Balcerzak J. : *Projection reductions of limited range in the Roussilhe projection*. Geodezja i Kartografia, t. XLVI, z. 4, 1993, 263-273.

Balcerzak J.: *Odwzorowanie Gaussa-Krügera w szerokiej 12° strefie dla obszaru Polski*. IX Szkoła Kartograficzna. Komorowo, 10-14.10.1994.

Biernacki F.: *Podstawy teorii odwzorowań kartograficznych*. PWN, Warszawa 1983.

Czarnecki K.: *Geodezja współczesna w zarysie*. Wyd. Wiedza i Życie, 1994

Gajderowicz I.: *Kartografia matematyczna dla geodetów*. Wyd. ART - Olsztyn, 1991, n.ed. 1999.

Grabowski L.: *O wyrażeniach współrzędnych prostokątnych odwzorowania gausowskiego (hanowerskiego) jako funkcji współrzędnych geograficznych*. Czasopismo Techniczne, Lwów 1932.

Hausbrandt S.: *Rachunek wyrównawczy i obliczenia geodezyjne*. T. II, PPWK Warszawa 1971.

Kadaj R.: *Procedury transformacji pomiędzy państwowymi układami współrzędnych*. Opis procedur bazy GEOS w CODGiK. GEOMAT sp. z o.o. w Poznaniu, wrzesień 1999.

Kadaj R.: *GEONET\_unitrans: uniwersalny program transformacji współrzędnych pomiędzy różnymi układami w obszarze Polski oraz programy pomocnicze*. Opis pakietu. I wyd. 1977, n.ed. 2000, ALGOIRES-SOFT s.c. Rzeszów.

Krüger L.: *Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene*. Pr. Geod. Instit. Neue Folge 51. Podstam, 1912.

Łyszkowicz A.: *The Geoid for the area of Poland*. Artificial Satellites, Planetary Geodesy, No. 19, Vol.28, 1993.

Osada E.: *Transformacja współrzędnych GPS na współrzędne kartograficzne i wysokości niwelacyjne*. Zesz. Nauk. AR we Wrocławiu, s. Geodezja i Urządzenia Rolne XIII, 296, Wrocław 1996.

Panasiuk J.: *The concept of a solution of fundamental reverse geodetic problem in the Gauss-Krüger projection*. Geodezja i Kartografia, 31, 1, 1982, 3–22.

Panasiuk J., Balcerzak J., Gdowski B.: *The Roussilhe projection of the entire ellipsoid*. 16th International Cartographic Conference, Cologne 1993, 1278–1286.

Plewako M. : *Enlargement of efficient application of L. Krüger's algorithm for computation of rectangular coordinates in the Gauss-Krüger projection in a wide meridional zone*. Zesz. Nauk. AGH, s. Geodezja, z.112 (1423), Kraków 1991, 105–117.

Plewako M. : *Algorytm zagadnienia odwrotnego w odwzorowaniu Gaussa-Krügera według rozwinięcia na szeregi potęgowe*. Zesz. Nauk. AR w Krakowie, s. Geodezja, z. 14 (289), 1993, 111–119.

PAŃSTWOWY UKŁAD WSPÓŁRZĘDNYCH 1992. Główny Geodeta Kraju (mat. do użytku służbowego). Warszawa 1995.

Instrukcje techniczne GUGiK: O–1/O–2, G–2. Główny Urząd Geodezji i Kartografii, Warszawa 2001.

*Ekspertyza dotycząca odwzorowania kartograficznego dla wielkoskalowych opracowań geodezyjnych i kartograficznych w Polsce*. Polska Akademia Nauk, Komitet Geodezji, Sekcja Sieci Geodezyjnych. Opracowanie wykonane przez zespół pod przewodnictwem *prof. dr. hab. inż. Włodzimierza Barana*.

## OPIS PROGRAMU TRANSPOL v. 1.0

### TRANSPOL (wersja 1.0) - instrukcja użytkownika programu

© Główny Geodeta Kraju

**Autor:** Roman J. Kadaj **Interface:** Krzysztof Kostoń

Program realizuje przeliczanie współrzędnych pomiędzy różnymi układami w obszarze Polski według wytycznych technicznych **G-1.10 „Formuły odwzorowawcze i parametry układów współrzędnych”**.

Program jest zgodny ze standardami technicznymi przeliczeń współrzędnych między układami należącymi do państwowego systemu odniesień przestrzennych, zawartymi w instrukcji technicznej G-2 „Szczegółowa pozioma i wysokościowa osnowa geodezyjna i przeliczenia współrzędnych między układami”.

Zasadniczy program przeliczeniowy współrzędnych jest uzupełniony o:

- program płaskiej, liniowej transformacji konforemnej (Helmerta) wraz z korektą posttransformacyjną Hausbrandta,
- program interpolacji geoidy niwelacyjnej.

**UWAGA:** Zawarty w programie dyskretny model geoidy niwelacyjnej jest modelem pokazowym (typ DEMO), który może być wykorzystany jedynie dla redukcji obserwacji długości. Do przeliczeń pomiędzy wysokościami elipsoidalnymi i wysokościami państwowego układu wysokości należy używać modelu geoidy niwelacyjnej wprowadzonego do stosowania przez Głównego Geodetę Kraju.

---

**Uwaga:** TRANSPOL v.1.0 może być używany do kontroli poprawności przeliczeń współrzędnych pomiędzy układami należącymi do państwowego systemu odniesień przestrzennych.

Program jest przeznaczony wyłącznie do obliczeń testowych.

---

#### Instrukcja zawiera:

- 1) Przebieg procesu instalacji
- 2) Strukturę programu
- 3) Obsługiwane rodzaje układów współrzędnych
- 4) Okno główne programu
- 5) Wykonywanie podstawowych operacji
- 6) Strukturę danych źródłowych
- 7) Strukturę danych wynikowych
- 8) Transformację Helmerta oraz interpolację geoidy

---

#### 1) Przebieg procesu instalacji

Proces instalacji programu TRANSPOL należy uruchomić plikiem **instaluj.exe** zamieszczonym na płycie CD. Użytkownik ma możliwość wybrania katalogu, do którego zostanie zainstalowany program. Poprawny przebieg instalacji zakończy się komunikatem „*Instalacja przebiegła pomyślnie*”.



Właściwy program wykonawczy uruchamia się plikiem **TransPol.exe** zlokalizowanym w folderze PROGRAMY.

## 2) Struktura programu

Program instalacyjny utworzy w katalogu wskazanym przez użytkownika następujące foldery:

- PROGRAMY
- POMOC
- OBIEKTY.

Folder OBIEKTY przeznaczony jest do gromadzenia obiektów roboczych, w których użytkownik będzie zapisywał wszystkie pliki źródłowe i wynikowe. Wszystkie wynikowe pliki przeliczeń będą zapisywane do aktywnego w danej chwili obiektu roboczego. Aktywny obiekt roboczy jest definiowany przez użytkownika w oknie głównym programu.

W momencie instalacji domyślnie jest zakładany jeden obiekt roboczy o nazwie DEMO z jednym plikiem wejściowym xy65 (współrzędne w układzie „1965” - strefa 1). Na płycie instalacyjnej programu w katalogu OBIEKTY\DODATKOWE zawarte są dodatkowe pliki zawierające bardziej urozmaicone dane do przykładowych przeliczeń między układami oraz do interpolacji geoidy i transformacji. Użytkownik może je przekopiować do katalogu, w którym zainstalowano program (np. do istniejącego podkatalogu DEMO). Po przekopiowaniu plików należy pamiętać o zlikwidowaniu zaznaczenia ich atrybutów - "tylko do odczytu".

W folderze POMOC znajduje się binarny plik **geoida.bin**, zawierający dyskretny model geoidy, niezbędny do korzystania z aplikacji obliczającej wartości odstępów geoidy od elipsoidy. W programie jest zawarty model „Geoida niwelacyjna 2000”, który pozwala wyznaczyć wielkości odstępów od elipsoidy GRS-80 (EUVN, ITRF-96 epoka 1997.4 – Kronsztad 86). Użytkownik będzie mógł wprowadzić do programu aktualny model geoidy poprzez wymianę pliku **geoida.bin** zamieszczonego na stronie internetowej Głównego Urzędu Geodezji i Kartografii.

---

## 3) Obsługiwane typy układów współrzędnych

- „1965” - strefy 1,2,3,4,5  
**Uwaga:** bezpośrednie przeliczenia związane z układem „1965” dotyczą wyłącznie jego formuł matematycznych i nie obejmują wpasowania w tzw. układ empiryczny,
- „1942” - stanowi aplikacje odwzorowań Gaussa-Krügera w pasach południkowych 3- lub 6-stopniowych:
  - pasy 3-stopniowe obejmują 4 strefy z następującymi południkami środkowymi: 15, 18, 21, 24,
  - pasy 6-stopniowe obejmują 2 strefy z południkami środkowymi: 15 i 21,

- „1992” - jednostrefowy dla obszaru Polski układ powstały jako aplikacja odwzorowania Gaussa-Krügera elipsoidy GRS-80 z południkiem środkowym 19 i skalą na tym południku  $m = 0.9993$ ,
  - „2000” - czterostrefowy układ odwzorowawczy elipsoidy GRS-80, utworzony analogicznie jak układ „1942” dla pasów 3-stopniowych, ze skalą na południku środkowym  $m = 0,999923$ ,
  - **blh [GRS-80]** - układ współrzędnych geodezyjnych na elipsoidzie GRS-80,
  - **blh [Krasowski]** - układ współrzędnych geodezyjnych na elipsoidzie Krasowskiego,
  - **UTM** - międzynarodowy układ współrzędnych powstały poprzez aplikację odwzorowania Gaussa-Krügera elipsoidy GRS-80 w pasach 6-stopniowych ze skalą na południku środkowym każdej strefy wynoszącą  $m = 0.9996$ ,
  - **GUGiK-80** - jednostrefowy dla obszaru Polski układ kartograficzny, przeznaczony dla map przeglądowych w skalach 1:100 000 lub mniejszych, powstały poprzez odwzorowanie quasi-stereograficzne elipsoidy Krasowskiego.
- 

#### 4) Okno główne programu

Bezpośrednio po uruchomieniu programu uzyskujemy na ekranie okno główne podzielone na dwie części pozwalające wybrać typ danych źródłowych (wejściowych) i wynikowych (wyjściowych).

Pasek Menu zawiera następujące rozwijalne listwy:

- **Obiekty:**
    - Pokaż pliki* - pokazuje wszystkie pliki aktywnego obiektu roboczego,
    - Dodaj obiekt* - dodaje nowy obiekt roboczy do folderu OBIEKTY,
    - Importuj pliki...* - dodaje plik o dowolnej lokalizacji do aktywnego obiektu roboczego,
    - Wyjście* - zamyka program;
  - **Edycja:**
    - Edytor tekstowy* - otwiera edytor programu pozwalający przeglądać zawartość plików danych oraz tworzyć nowe pliki poprzez wpis danych bezpośrednio z klawiatury;
  - **Trans H:**
    - Geoida* - uruchamia program do obliczania odstępów geoidy od elipsoidy;
  - **Trans XY:**
    - Konforemna* - uruchamia program do płaskiej, konforemnej transformacji Helmerta;
  - **Pomoc** - zawiera opis działania programu.
-

## 5) Wykonywanie podstawowych operacji

Okno główne programu jest uzupełnione szeregiem przycisków funkcyjnych o odpowiednim znaczeniu:

- okienko edycyjne – do zmiany aktywnego obiektu oraz wpisywania nazw nowych obiektów,
- przycisk notatnika – otwiera edytor tekstowy wbudowany w program,
- przycisk dodaj – dodaje nowy obiekt po uprzednim wpisaniu jego nazwy w okienku edycyjnym,
- przycisk zarządzania plikami – uruchamia okno dialogowe pozwalające edytować, zmieniać nazwy, importować oraz usuwać dostępne pliki aktywnego obiektu,
- przycisk *Obliczenia* – inicjuje proces przeliczania współrzędnych.

Program nie zaakceptuje nowego obiektu, jeżeli jego nazwa pokryje się z nazwą obiektu już istniejącego.

Obiekt aktywny jest wybierany w okienku edycyjnym. Z obiektu aktywnego program pobiera zbiory wejściowe oraz zapisuje do niego wszystkie zbiory wynikowe.

Proces przeliczenia współrzędnych rozpoczyna się poprzez wskazanie odpowiedniej pary układów (wejście – wyjście), stosownych opcji (stref i pasów) oraz zainicjowanie obliczeń przyciskiem *Obliczenia*.

---

## 6) Struktura danych źródłowych

Zbiory wejściowe dla programu głównego mają nazwy standardowe pokrywające się z nazwami układów w oknie głównym programu i w tej postaci są rozpoznawane automatycznie przez program obliczeniowy.

Program automatycznie rozpoznaje następujące zbiory danych:

- xy65, xy42, xy92, xy2000 - zbiory współrzędnych płaskich w układach odpowiednio skojarzonych z nazwą,
- blh42 - zbiór współrzędnych geodezyjnych na elipsoidzie Krasowskiego,
- blh92 - zbiór współrzędnych geodezyjnych na elipsoidzie GRS-80,
- xyz42, xyz92 - zbiory współrzędnych kartezjańskich dla odpowiednich elipsoid,
- utm92 - zbiór współrzędnych w układzie UTM,
- GUGIK-80 - zbiór współrzędnych w układzie GUGiK-80.

### Ogólne zasady budowania zbiorów wejściowych:

Wszystkie zbiory wejściowe do programów obliczeniowych są zbiorami tekstowymi (ASCII). Każdy wiersz (rekord) musi zaczynać się numerem punktu, po którym powinny być podane odpowiednie współrzędne, rozdzielone przynajmniej jednym znakiem spacji.

Zbiory współrzędnych płaskich zawierają w każdym rekordzie, obok numeru, współrzędne x, y w metrach.

Zbiory współrzędnych kartezjańskich trójwymiarowych zawierają dodatkowo współrzędną z.

Współrzędne geograficzne geodezyjne zapisuje się, podając osobno: stopnie, minuty i sekundy.

Stopnie i minuty są liczbami całkowitymi, sekundy – liczbami rzeczywistymi.

Numery punktów muszą być liczbami naturalnymi (nie są dopuszczalne inne ciągi znaków).

Liczyby rzeczywiste (współrzędne x, y, z, wysokości H w metrach oraz sekundy) zapisuje się z kropką pozycyjną oddzielającą część całkowitą liczby od jej części ułamkowej. Przed kropką musi być co najmniej jedna cyfra (np. zero).

Przykład rekordu w zbiorze blh42 lub blh92:

216	52	16	35.192	17	4	36.096	79.651
217	52	28	30.908	21	2	13.340	109.110
301	54	49	40.036	18	19	42.395	36.985

(nr punktu, szerokość B, długość L, wysokość elipsoidalna h).

Nie ma praktycznie ograniczenia co do wielkości zbiorów wejściowych (liczby punktów transformowanych).

Nadmiar informacji w rekordzie nie przeszkadza - jest traktowany jako komentarz.

Uwaga!

1. Przy przeliczaniu współrzędnych płaskich (x, y) program przyjmuje automatycznie wysokość elipsoidalną  $h=0$ .
2. Wysokość elipsoidalną punktu można uwzględnić, dopisując ją do odpowiednich współrzędnych geodezyjnych BLh92 lub BLh42 – plik ten powinien być pośrednią drogą przejścia do współrzędnych końcowych. Pliki blh\* wymagają podania wysokości h (wysokość h może być podana jako 0 z zastrzeżeniem opisanym na stronie 16 wytycznych).
3. TRANSPOL v.1.0 należy stosować wyłącznie do przeliczeń współrzędnych punktów położonych na obszarze kraju, dla stref i pasów odwzorowania zdefiniowanych w instrukcji technicznej „O-1/O-2 Ogólne zasady wykonywania prac geodezyjnych i kartograficznych”. Programem tym nie należy obliczać współrzędnych poza zdefiniowanymi obszarami dla określonych stref i pasów odwzorowania.

---

## 7) Struktura danych wynikowych

- Zbiory wynikowe podstawowego programu realizującego przeliczenia współrzędnych otrzymują analogiczne nazwy jak zbiory źródłowe, ale z rozszerzeniem \*.1 (np. BLh42.1).
- Wszystkie zbiory wynikowe tworzone są w kodzie ASCII.
- Wynikowe zbiory współrzędnych płaskich zawierają dodatkowo elementarne zniekształcenie liniowe (w punkcie odwzorowania) w [cm/km] oraz wartość konwergencji w gradach.  
Dodatkowo w zbiorach wynikowych podawana jest krótka informacja tekstowa identyfikująca układ i strefę.



**PRZYKŁAD PROCEDURY OBLICZANIA  
DŁUGOŚCI I AZYMUTÓW LINII GEODEZYJNEJ**

**metodą „szerokości średniej” Krügera**  
(Zapis procedury w j. Fortran. Autor: R. J. Kadaj)

```

C
C PARAMETRY WEJŚCIOWE PROCEDURY:
C RA ( 6378137.0D0 )      ! pólka a ( elipsoidy GRS-80)
C RB ( 6356752.3141D0)    ! pólka b ( elipsoidy GRS-80)
C XB1,XL1,XB2,XL2        ! współrzędne geodezyjne (B,L) dla
C                          pary punktów (1,2) linii geodezyjnej
C                          wyrażone w sekundach stopniowych
C PARAMETRY WYNIKOWE:
C XM1,XN1,XM2,XN2 - promienie główne (M,N) krzywizny w
C                    punktach 1,2 w [ m ]
C AZ12, AZ21 - azymut początkowy i powrotny linii geodezyjnej w [ cc ]
C
C SDS - długość linii geodezyjnej w [ m ]
C
C   SUBROUTINE LIGE2 (RA, RB,XB1,XL1,XB2,XL2,
C *   XM1,XN1,XM2,XN2,AZ12,AZ21,SDS)
C
C   REAL*8 RA, RB, XC, E2, EE2, XB1, XL1, XB2, XL2,
C *   XM1, XN1, XM2, XN2, XM, XN, AZ12, AZ21, SDS, V, VV, Q, QQ,
C *   V1, VV1, Q1, QQ1, V2, VV2, Q2, QQ2, SDS1, AZ, C, S, PK, CK, RO,
C *   CCF, SSF, TTF, CF, SF, TF, CF1, SF1, TF1, CF2, SF2, TF2, DA,
C *   C1, C2, C3, XB, XL, DB, DL, DDB, DDL, DX, DY,
C *   XXB1, XXL1, XXB2, XXL2, RO1
C
C   C1 = (RA - RB) / RA
C   C2 = (RA + RB) / RA
C   E2 = C1 * C2                ! kwadrat pierwszego mimośrodu
C   EE2=E2 / (1.0D+0-E2)       ! kwadrat drugiego mimośrodu
C   XC=RA* DSQRT(1.0D+0+EE2)   ! parametr pomocniczy
C
C   RO1 = 1.0D+0 / 206264.8062481D+0
C   XXB1=XB1*RO1
C   XXL1=XL1*RO1
C   XXB2=XB2*RO1
C   XXL2=XL2*RO1
C   XB=(XXB1+XXB2)*0.5D+0
C   XL=(XXL1+XXL2)*0.5D+0
C   CF1=DCOS(XXB1)
C   CF2=DCOS(XXB2)
C   QQ1=EE2*CF1*CF1
C   QQ2=EE2*CF2*CF2
C   VV1=1.0D+0+QQ1

```

```

V1=DSQRT(VV1)
VV2=1.0D+0+QQ2
V2=DSQRT(VV2)
XM1=XC/(VV1*V1)
XN1=XC/V1
C..... cd
C..... cd
XM2=XC/(VV2*V2)
XN2=XC/V2
CF=DCOS(XB)
CCF=CF*CF
SF=DSIN(XB)
SSF=SF*SF
TF=DTAN(XB)
TTF=TF*TF
QQ=EE2*CCF
VV=1.0D+0+QQ
V=DSQRT(VV)
XN=XC/V
DL=XXL2-XXL1
DDL=DL*DL
DB=XXB2-XXB1
DDB=DB*DB
C1=(1.0D+0+DDL*CCF*(2.0D+0+3.0D+0*TTF+2.0D+0*QQ)/24.0D+0
* +DDB*QQ*(TTF-1.0D+0-QQ-4.0D+0*QQ*TTF)/(8.0D+0*VV*VV))*VV/XN
C2=(1.0D+0+DDL*SSF/24.0D+0-DDB*(1.0D+0+QQ-9.0D+0*QQ*TTF)/
* (24.0D+0*VV*VV))/(XN*CF)
C3=DL*SF*(1.0D+0+DDL*CCF*VV/12.0D+0
* +DDB*(3.0D+0+8.0D+0*QQ+5.0D+0*QQ*QQ))
DX=DB/C1
DY=DL/C2
c----DA-- przyrost azymutu na łuku ortodromy-----
DA=C3*636619.772368D+0
c----SDS- długość linii geodezyjnej-----
SDS=DSQRT(DX*DX+DY*DY)
SDS1=1.0D+0 / SDS
DX=DX*SDS1
DY=DY*SDS1
c---- obliczenie średniego azymutu w [ cc ] -----
RO=636619.772368D+0
PK=2000000.0D+0
CK=4000000.0D+0
S=DABS(DY)
C=DABS(DX)
IF(S.LE.C) THEN
AZ=DASIN(S)*RO
ELSE
AZ=DACOS(C)*RO
END IF

```

```
IF(DX.GT..0.AND.DY.GE..0) GOTO 10
IF(DX.GE..0.AND.DY.LT..0)AZ=CK-AZ
IF(DY.GT..0.AND.DX.LE..0)AZ=PK-AZ
IF(DX.LT..0.AND.DY.LE..0)AZ=PK+AZ
c----- obliczenie azymutów linii geodezyjnej ----
10 AZ12=AZ-DA*0.5D+0
IF(AZ12.LT.0.0) AZ12=AZ12+CK
AZ21=AZ+DA*0.5D+0+PK
IF(AZ21.GE.CK) AZ21=AZ21-CK
RETURN
END
```



**WSPÓLRZĘDNE PUNKTÓW EUREF-POL  
W UKŁADACH ELIPSOIDALNYCH  
GRS-80 I KRASOWSKIEGO 42**  
(przeliczenia zgodne z podanymi algorytmami)

---

WSPÓLRZĘDNE KARTEZJAŃSKIE XYZ (GRS-80)

NR	X	Y	Z
216	3738397.180	1148285.751	5021752.207
217	3633815.667	1397453.930	5035280.798
301	3495579.623	1157845.533	5190403.614
302	3524523.267	1329693.458	5129846.189
303	3475730.662	1453976.538	5129448.807
304	3635006.809	1051224.494	5117503.217
306	3664940.623	1409153.720	5009571.367
307	3846614.367	1106083.899	4949572.478
308	3803542.932	1352681.133	4921845.791
309	3717652.591	1622948.940	4905872.913
310	3866100.293	1479953.023	4836446.401

WSPÓLRZĘDNE BLH (GRS-80)

NR	B			L		H	
216	52	16	33.997025	17	4	29.492367	116.8626
217	52	28	29.960670	21	2	6.758022	139.9061
301	54	49	39.015888	18	19	35.360038	70.8066
302	53	53	32.630732	20	40	11.775370	187.0488
303	53	53	9.788738	22	42	2.369100	210.3676
304	53	42	14.423534	16	7	46.509189	238.9346
306	52	5	50.179784	21	1	53.524053	141.6533
307	51	13	37.979200	16	2	32.823288	203.8567
308	50	49	47.448621	19	34	38.192108	303.6121
309	50	36	10.522869	23	35	1.590543	318.0162
310	49	37	43.040999	20	56	49.102801	408.3730

WSPÓLRZĘDNE XYZ (KRASOWSKI)

NR	X	Y	Z
216	3738372.8757	1148409.2702	5021833.7548
217	3633792.2973	1397578.0629	5035362.8172
301	3495555.1969	1157969.7600	5190485.3824
302	3524499.5525	1329817.8164	5129928.1979
303	3475707.4146	1454101.2011	5129531.0442
304	3634982.0454	1051348.1879	5117584.7030

306	3664917.3207	1409277.7801	5009653.3770
307	3846589.9626	1106207.0657	4949653.8640
308	3803519.4928	1352804.7314	4921927.5935
309	3717630.1808	1623073.1446	4905955.1941
310	3866077.4050	1480076.6210	4836528.3370

#### WSPÓŁRZĘDNE PRZELICZONE BLH (KRASOWSKI)

NR	B			L		H	
216	52	16	35.192872	17	4	36.096306	79.6513
217	52	28	30.908658	21	2	13.340690	109.1104
301	54	49	40.036957	18	19	42.395795	36.9859
302	53	53	33.543111	20	40	18.604682	156.3358
303	53	53	10.576291	22	42	9.156463	182.7560
304	53	42	15.624389	16	7	53.361357	201.1162
306	52	5	51.143432	21	2	.046216	110.6732
307	51	13	39.275798	16	2	39.270942	164.2953
308	50	49	48.549787	19	34	44.543508	269.6193
309	50	36	11.397794	23	35	7.834513	290.4927
310	49	37	44.109753	20	56	55.261894	376.0065

#### WSPÓŁRZĘDNE GEODEZYJNE ARCHIWALNE NA ELIPSOIDZIE KRASOWSKIEGO

NR	B			L		H	
216	52	16	35.19055	17	4	36.09028	79.652
217	52	28	30.90146	21	2	13.35614	109.111
301	54	49	40.05343	18	19	42.40150	36.987
302	53	53	33.54275	20	40	18.60770	156.337
303	53	53	10.58159	22	42	9.15425	182.757
304	53	42	15.61435	16	7	53.36114	201.117
306	52	5	51.13515	21	2	.06639	110.674
307	51	13	39.27807	16	2	39.26189	164.296
308	50	49	48.56502	19	34	44.55778	269.620
309	50	36	11.38821	23	35	7.84110	290.493
310	49	37	44.11058	20	56	5.26015	376.007

**WSPÓŁRZĘDNE EUREF-POL  
W STREFACH UKŁADU „1965” ORAZ W UKŁADZIE „1992”**

**UKŁAD „1965”** [współrzędne matematyczne bez zastosowania korekt do układu empirycznego; współrzędne geodezyjne wszystkich punktów w załączniku 3]

**Strefa 1**

Nr	X	Y	$\sigma$ [cm/km]	$\gamma$ [°]
217	5672837.97483	4633854.14035	6.014	-.0402890
306	5630807.85778	4633574.51134	-3.521	-.0433867
308	5490894.54048	4531040.97027	-12.758	-1.2939672
309	5467560.69331	4814086.25876	-.750	2.1489253
310	5356230.71354	4627273.15774	-12.410	-.1148254

**Strefa 2**

217	5747501.67105	4571359.11311	-17.286	-.4118638
302	5905432.91449	4548377.78747	-12.105	-.7416982
303	5905068.15401	4681877.37593	-10.163	1.0708711
306	5705480.82130	4570834.54630	-13.166	-.4140947

**Strefa 3**

216	5853585.28410	3505665.61000	-7.015	.0606087
301	6138291.62085	3585831.49919	-3.686	1.1898295
302	6039628.68322	3741734.22729	16.557	3.2825852
304	6012822.17515	3443105.22912	-17.827	-.7846329

**Strefa 4**

216	5694449.26248	3730602.45375	-16.741	.3540199
304	5853405.68459	3667285.80146	12.240	-.4779278
307	5577881.40021	3659140.99606	-17.339	-.5456903
308	5537538.42115	3907733.18569	10.645	2.5191692

**Strefa 5**

308	933377.66307	280730.85680	.647	.5346967
-----	--------------	--------------	------	----------

**UKŁAD „1992”**

Nr	X	Y	$\sigma$ [cm/km]	$\gamma$ [°]
216	491755.55115	368698.28523	-48.830	-1.6921578
217	514071.92846	638185.76320	-46.553	1.7937265
301	773980.96710	456745.16927	-67.704	-.6117233
302	671049.49479	609708.07352	-55.226	1.4992175
303	675398.26615	743113.84602	2.555	3.3233531
304	652629.45871	310593.99113	-25.961	-2.5712775
306	472071.33638	639114.56823	-46.235	1.7813862
307	377544.99745	293566.91895	-17.657	-2.5629110

308	329372.28029	540642.83309	-67.971	.4972807
309	314019.19370	824214.64017	59.144	3.9391725
310	197510.50700	640559.23111	-45.725	1.6484070

**WSPÓLRZĘDNE EUREF-POL  
W STREFACH UKŁADU „2000”**

**$L_0 = 15^\circ$**

Nr	X	Y	$\sigma$ [cm/km]	$\gamma$ [°]
304	5953105.55795	5574590.75485	-.875	1.0116151
307	5677442.94465	5572813.17213	-1.192	.9030747

**$L_0 = 18^\circ$**

216	5794023.40284	6436860.34547	-2.808	-.8130904
301	6077608.62607	6520981.25767	-7.160	.2965334
308	5633908.84849	6611114.17815	7.456	1.3588271

**$L_0 = 21^\circ$**

217	5815749.20340	7502392.32989	-7.693	.0310278
302	5973529.93109	7478301.83173	-7.122	-.2962914
303	5974113.99672	7611812.69471	7.636	1.5266797
306	5773722.71413	7502160.86044	-7.694	.0276471
308	5633687.82488	7399772.99819	4.631	-1.2256577
310	5499118.28574	7496169.27901	-7.682	-.0448881

**$L_0 = 24^\circ$**

303	5973555.87010	8414570.93710	1.253	-1.1663685
309	5607563.99767	8470535.62325	-6.634	-.3573852